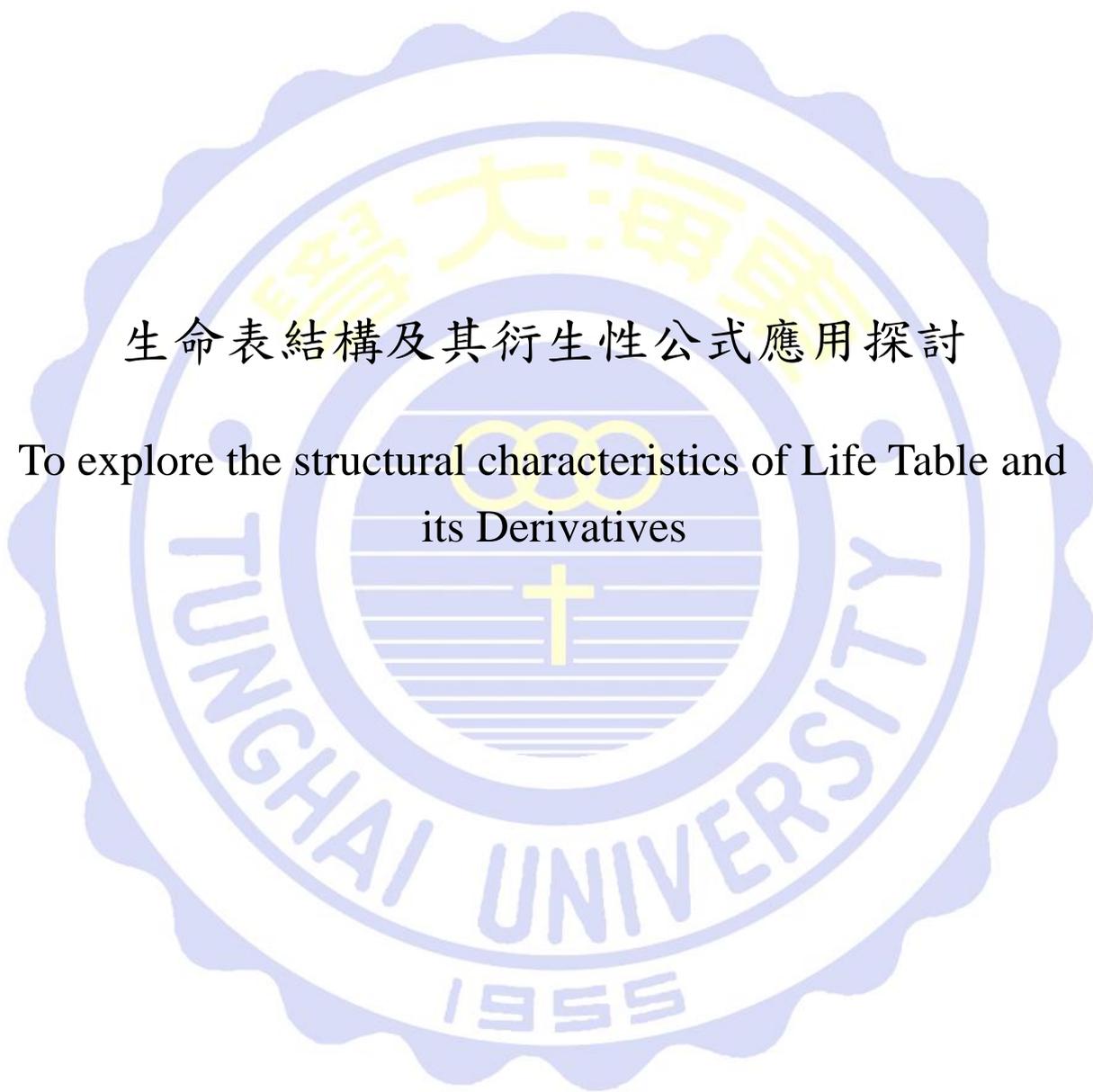


東海大學統計研究所  
碩士論文

生命表結構及其衍生性公式應用探討

To explore the structural characteristics of Life Table and  
its Derivatives



指導教授:林正祥 博士

研究生:張怡陵

中華民國一〇八年一月

# 東海大學碩士班研究生

## 論文口試委員審定書

統計學系碩士班張怡陵君所提之論文

生命表結構及其衍生性公式應用探討

---

經本委員會審議，認為符合碩士資格標準。

論文口試委員召集人 戴政 (簽章)

委員 林心禎

江存龍

中華民國 108 年 01 月 15 日

## 致謝

首先感謝辛苦指導我的恩師林正祥老師，在完成碩士論文的這一年多中，受到老師不辭辛勞的指點提攜，使我的研究能夠逐步完成，無論我的觀念理解多麼遲鈍，但老師仍很有耐心的帶著我一步步的去理解，在我遇到疑惑與不解時給予協助，謝謝老師付出的時間、精神以及這段時間對我的訓練與指導。同時，要感謝我的論文口試委員戴政老師以及沈葆聖老師在百忙之中抽空前來參與口試，並提供寶貴的想法及建議，在此獻上最誠摯的感激。

再來要感謝所有統計系的老師及助教們給予我課程上的協助，也感謝在我研究生涯中，同為東海統計研究所的夥伴們，在研究所的這段期間，我們共同分享了研究所生活的酸甜苦辣，有困難時大家也互相扶持，這份美好的回憶我會永存在心中，祝福各位未來的事業順利，鵬程萬里。

最後要謝謝我的家人，在這二十幾年來對我投注的心力，在人生的路上一直陪伴著我，支持我作的任何決定，並在低潮時給予支持與鼓勵，面對家人們無盡的關愛與溫暖，在此致上我最大的感激，謝謝你們。

張怡陵

謹致於東海大學統計研究所

中華民國 108 年 1 月

## 摘要

生命表的概念起源於人類壽命的研究，它是人口學、保險精算學和公共衛生學中特有的專題，其係用來描述人口死亡過程的一種模型，且類似於可靠性理論中的統計方法；人類壽命是一種隨機實驗，其生死具有偶然性，生命表系統地記錄了一定人口中大量個體的生死結果，其中許多函數都是隨機變數。

本研究利用生命表函數所衍生性之數學公式來詮釋生命表某些重要性質，以一窺生命表奧妙特性，並利用台灣生命表資料進行驗證，就其變化趨勢深入探討；先闡明生命表之結構特性，再藉由其衍生性公式進行分析探討生命表函數中風險函數、存活機率及平均餘命間之關係。此外，進一步就死亡年齡變異、存活曲線矩形化間之關係及延遲老化模式進行探討。1950 年以後生命表資料顯示存活曲線矩形化趨勢明顯，由於死亡年齡變異與存活曲線矩形化為反向關係，我們藉由 1996-2016 年資料，以固定矩形、移動矩形、四分位距、標準差等指標測量存活曲線矩形化趨勢，另以 Gini 係數和生命表熵作為死亡年齡變異的測度。結果顯示：存活曲線在 1996-2016 年間逐漸呈現矩形化的情況，且死亡年齡變異也呈下降狀態。與矩形化緊密關連的現象為死亡壓縮，它是指死亡率下降過程，青中年人口存活率上升，死亡年齡逐漸集中在某一高齡區間的現象，故運用與死亡年齡眾數有關的標準差和  $C_{50}$  指標來探討壽命後期死亡年齡變異的情形，均顯示變異會隨年代遞增而變小，而 2008 年後的死亡年齡區間收斂速度有變快的趨勢；最後我們以年齡 95 歲為上限利用面積差異百分比來檢測矩形化，其結果顯示矩形化逐漸趨向壽命極限。另一方面，有些研究學者認為人類的平均餘命長短與延遲老化有密切的關係，有諸多模式探討相關議題，其中較為重要之混合模式顯示平均餘命增長變化主要是受到死亡率下降和遲緩衰老步調下降消長的影響，吾等利用台灣 1998-2008 年的資料探討平均餘命增長趨勢，其中的 27% 是受到死亡率下降的影響，而受到延遲老化的影響則為 73%，顯示這些年來平均餘命受到遲緩衰老的影響遠較死亡率下降來的大，對於平均餘命的展延，遲緩衰老當扮演舉足重的角色。

**關鍵詞：**生命表衍生性公式、存活曲線矩形化、死亡變異、死亡壓縮、混合模式、遲緩衰老

## Abstract

The concept of life table originated from the study of human longevity. It was presented as a subject peculiar to demography, actuarial science and public health. It is a model used to describe the process of population death and is similar to the statistical method in reliability theory. Human life is a random experiment, its outcomes, survival and death, are subject to death. A life table systematically records the life and death of a number of individuals in a certain population. Thus the elements in the life table are random variables. This study uses the mathematical formula derived from the life table random variables to interpret some important properties of the life table. The life table data in Taiwan is applied to verify the trend of these properties. Firstly, we clarify the structural characteristics of the life table, and use its derivatives to investigate some combinations among the force of mortality, survival probability and life expectancy. Secondly, we inspect the inverse relation between variability in the distribution of ages at death, and the rectangularity of the survival curves. Finally, a flexible model of mortality related to proportional-hazards and senescence-slowness is used for taking an inside look of the subtle characteristics of the life expectancy increasing. Historical data of Taiwan life table after 1950s shows that the survival curve appeared rectangularity gradually, and the variability in the distribution of ages at death is declining. Based on the life table data in Taiwan from 1998 to 2008, a hybrid model of mortality used for analyzing the life expectancy increasing of the elderly. We find the trend influence life expectancy increasing, of which 27% were affected by the decline in mortality, while 73% were affected by senescence-slowness, indicating the latter plays a pivotal role influence the life expectancy.

***Keywords: life table derivatives, rectangularity of the survival curves, variability in the distribution of ages at death, hybrid model of mortality, senescence-slowness***

## 目錄

審定書 .....	I
致謝 .....	II
中英文摘要 .....	III
表目錄 .....	VI
圖目錄 .....	VII
壹、前言 .....	1
貳、生命表結構與特性 .....	3
§ 2.1 年齡別死亡率和死亡機率 .....	4
§ 2.2 年齡 $x$ 之機率密度函數 .....	6
§ 2.3 條件機率與密度 .....	7
參、生命表衍生性公式及其應用 .....	11
§ 3.1 存活別死亡力倒數之死亡加權平均推算平均餘命 .....	13
§ 3.2 平均餘命變方 .....	17
§ 3.3 生命存活與平均餘命 .....	20
肆、死亡年齡變異與存活曲線矩形化關係 .....	26
伍、延遲老化步調與平均餘命成長相關模式 .....	42
陸、結語 .....	47
參考文獻 .....	49

## 表目錄

表 1	104 年台灣地區五齡組簡易生命表 .....	9
表 2	存活模式與生命表函數對照表 .....	10
表 3	1998-2016 年靜止人口的平均存活與平均剩餘之生命 .....	24
表 4	1996-2016 年死亡年齡變異與存活曲線矩形化的關係 .....	28
表 5	1975-2016 年之死亡年齡眾數 .....	32
表 6	1975-2000 各年至 2016 年之死亡年齡眾數斜率 .....	33
表 7	1998-2016 年之死亡壓縮趨勢指標 .....	36
表 8	1992、2016 年存活曲線矩形化累積至各年齡之面積差異% .....	38
表 9	存活曲線與矩形面積差異百分比 .....	40
表 10	存活曲線與矩形面積差異百分比 (三年合併) .....	41
表 11	死亡率變動模式 .....	44

## 圖目錄

圖 1	2016 年存活函數和年齡分別對應之年齡、存活機率、死亡力及平均餘命 .....	16
圖 2	2016 年存活機率變方、平均餘命變方與年齡趨勢圖 .....	19
圖 3	1998-2016 年靜止人口平均存活與平均剩餘生命趨勢 .....	25
圖 4	1996-2016 年存活死亡年齡變異與存活曲線矩形化趨勢 .....	29
圖 5	1954-2016 年存活曲線與年齡之對應圖 .....	30
圖 6	2016 年矩形化存活曲線 FD 指標驟降趨勢 .....	31
圖 7	1975-2016 年之死亡年齡眾數及 1975-2000 各年至 2016 之死亡年齡眾數斜率 ....	34
圖 8	1998-2016 年死亡壓縮趨勢指標 $SD(M+)$ 和 $C_{50}$ .....	35
圖 9	1992、2016 年死亡率及差異圖 .....	37
圖 10	1992、2016 年存活曲線矩形化累積至各年齡之面積差異% .....	38
圖 11	1992、2016 年存活曲線矩形化面積差異% .....	39
圖 12	1992-2016 年存活曲線與矩形面積差異百分比 .....	40
圖 13	1993-2015 年(合併三年)之存活曲線與矩形面積差異百分比 .....	41
圖 14	1998 到 2008 年混合模式之年齡與死亡率對數趨勢圖 .....	45

## 壹、前言

生命表是根據年齡死亡率或死亡機率及其他按年齡統計變量編制的，是一個描述人口死亡過程的統計模型，也是關於死亡率和其他不可重複過程最有用的描述工具，其功能在測定某一時期人口的死亡水準，為衡量國民生命消長情形之綜合指標，而利用較新的生命表可測量未來人口壽命的長短，其最大優點是不受人口年齡構成的影響，也避免了「標準化」方法的主觀武斷性。

一般而言，生命表有兩種形式：世代(cohort)生命表和現實(current)生命表。世代生命表記錄特定的一群人，從第一個人出生到最後一個人死去的實際死亡經歷。對於一個人群編制這樣的表當然有許多困難，給定人群中的成員可能有遷出和漏計的死亡，而且一組已經死亡者的期望壽命只有歷史方面的價值。然而，世代生命表在研究動物群體方面確實有實際應用，諸如機器、電燈泡和其他機械製品的耐用性問題，而改進的世代生命表已經應用於以人為對象的流行病學、社會學、醫學以及物理學研究，在治療有效性的研究中，分析病人存活的機會和時間長短已經擴充了生命表方法的應用。(Chiang, 1984)

現實生命表則是從一個橫斷面來看當年這時間內一群人的死亡和生存經歷(例如 2016 年台灣的人口)，它完全取決於編制一年中的年齡別死亡率，即給定人口實際的死亡率為基礎，把每個人的一生投影到一個假設的定群中。例如，當我們說到當年生下的一個嬰兒的平均餘命時，我們假定這個嬰兒的一生都遵循當年資料中所呈現的年齡別死亡率。此表是綜合一群實際人口死亡和生存經歷的最有效工具，且也為統計推論奠定了基礎。現實生命表有助於比較國際間死亡資料以及評估各國之死亡率趨勢。

事實上，生命表是一種統計分析方法，用於研究死亡率問題，而且類似於可靠度理論中的統計方法。由統計學來看，人類壽命是隨機實驗；其結果，生或死具有偶然性。生命表系統地記錄了一定人口中大量個體的生死結果，生命表中的許多要素都是隨機變

量，對它們可作純統計學分析。

各種生命表中的函數定義都是相同的。死亡機率  ${}_nq_x$  是一組基本的函數，它的涵義是一批  $x$  歲的人在進到  $x+n$  歲之前的死亡機率，計算出死亡機率後可推算出從出生到各年齡的存活機率  $l_x$ ，再根據給定的每個年齡間隔的死亡人數  ${}_nd_x$ ，即可計算出每個年齡層的生存人年數  ${}_xL_n$  和累計生存人數  $T_x$ 。最後得出  $e_x$  函數，即  $x$  歲時的平均餘命。平均餘命是指按照一個特定生命表所規定的死亡狀況，一個人可以繼續生存的平均年數。 $x$  歲的預期壽命用  $e_x$  表示，係指  $x$  歲者平均能存活之年數，出生時的平均壽命則以  $e_0$  表示；出生時的期望壽命是反應死亡狀況的一個非常有用的指標，它是根據所有年齡人口的實際死亡經歷，排除年齡結構的影響而計算出的。生命表的一個缺點是由於人類生命期較長，編制一個認列的完全生命表必須有大約一個世紀甚至更長時期內的死亡資料，用縮短認列死亡經歷，即只調查一定年齡範圍內的死亡率的辦法，可以部份地克服這個缺點。

本論文屬形式人口學範疇，有別於傳統生命表結構及其特質，藉由生命表函數推導出其相關衍生性公式(Life Table Derivatives)以詮釋生命表，得以一窺生命表奧妙特性，並援引數則衍生性公式，利用台灣 1996-2016 年生命表資料進行驗證並就其變化趨勢深入探討之。

## 貳、生命表結構與特性

傳統生命表的優點是易於理解，如果視 $l_0=100,000$ 為假定的某一新生嬰兒的原始群體人數的總數，那麼 $l_x$ 就表示這一群體中生存到 $x$ 歲的人數。在推導其他生命表函數的機率分配時可將 $l_0$ 看成一個常數， $l_x$ 則可視為生存到 $x$ 歲的期望生存人數。這樣就有確定的和隨機的兩種解釋。

從 $l_x$ 出發，推導出其他函數的值。如定義

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (2.1)$$

或者更一般地

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n} \quad (2.2)$$

顯然， ${}_n d_x$ 表示所研究的群體在 $x$ 歲到 $(x+n)$ 歲之間死亡的人數(對於死亡人數的描述或許是又將生命表稱之為死亡表的原因)，並且

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (2.3)$$

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} \quad (2.4)$$

(2.3)式與(2.4)式給出了 $x$ 歲人的條件死亡機率，可得

$${}_n p_x = 1 - {}_n q_x = \frac{l_x - {}_n d_x}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.5)$$

(2.5)式中， ${}_n p_x$ 表示 $x$ 歲的人生存到 $(x+n)$ 歲的條件生存機率。當 $n=1$ 時，則

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (2.6)$$

儘管生命表只對 $x$ 的整數值列出了 $l_x$ 的值，但我們假設產生這些值的 $l_x$ 是連續且可微分的函數，就可以通過 $l_x$ 推出其他一些重要的函數，正是基於上述原因，我們將相鄰整數間的死亡率分布作出假設，使得 $l_x$ 連續且可微分，從而推導出一些新的函數。

## § 2.1 年齡別死亡率和死亡機率

死亡率在生命表中係一重要之統計量，必須藉其轉換為死亡機率以推算出平均餘命。年齡別死亡機率和死亡率是關於總體中個體死亡危險性的兩個不同的測度。在討論兩者關係前，我們先從存活機率的角切入，存活機率 $s(x)$ 所表示的生存模型是一個具備所有機率分布性質的函數。簡單地變換 $l_x = l_0 \cdot s(x)$ 也表示同樣的機率分布(其中 $l_0$ 是常數)，函數 $l_x$ 和 $s(x)$ 相同，差別在於 $l_x$ 的值域是 $l_0 \geq l_x \geq 0$ ，而 $s(x)$ 的值域是 $1 \geq s(x) \geq 0$ ，所有由 $s(x)$ 推導出的結果也能由 $l_x$ 推導出來。

但是 $s(x)$ 是機率值，從某種意義上看，它是抽象的，而 $l_x$ 可解釋為當新生群體是初始規模為 $l_0$ 的封閉群體時，活到 $x$ 歲的人數， $l_{x+1}$ 即生存到 $(x+1)$ 歲的人數，這些人都從 $x$ 歲活到 $(x+1)$ 歲，而將 $(x, x+1]$ 歲之間生存年數的總和( $l_{x+1}$ )，再加上 $(x, x+1]$ 歲之間死亡的人所生存的總年數，即

$$l_{x+1} + \int_0^1 s \cdot l_{x+s} \cdot \mu_{x+s} d_s \quad (2.7)$$

(2.7)式即為 $l_x$ 個 $x$ 歲的人在 $(x, x+1]$ 歲之間生存的總年數，這個數量的單位是人年數，也稱為暴露數( $L_x$ )，它所衡量的是暴露於死亡風險下的群體生存總年數，其定義為 $L_x = \int_0^1 l_{x+s} d_s$ 和 ${}_n L_x = \int_0^n l_{x+s} d_s$ ，分別表示為年齡區間 $(x, x+1]$ 及 $(x, x+n]$ 之暴露數(群體生存總年數)。

有了 $L_x$ 的暴露數解釋，也可對 $m_x = \frac{d_x}{L_x}$ 做出進一步的解釋，將 $m_x$ 定義為在區間 $(x, x+1]$ 上的風險函數 $\lambda(y)$ 的連續加權平均數， $m_x = \frac{d_x}{L_x}$ 表示有 $d_x$ 個人在年齡區間 $(x, x+1]$ 中死亡，這一群體的死亡風險暴露數為 $L_x$ ，它們的比值 $m_x$ 則是在這一年齡區間的死亡率；值得注意的是， $m_x$ 有可能超過1，而 $q_x$ 則不可能超過。此外， $L_x$ 和 $T_x$ 之間存在著一種關係，即

$$T_x = \int_x^\infty l_y dy = \int_x^{x+1} l_y dy + \int_{x+1}^{x+2} l_y dy + \dots = L_x + L_{x+1} \dots = \sum_{y=x}^\infty L_y \quad (2.8)$$

引入暴露數可以使我們推導出一個關於死亡機率 ${}_nq_x$ 和死亡率 ${}_nm_x$ 間的有用公式。  
 當  $n=1$  時， $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ， $m_x = \frac{d_x}{L_x}$ ，而要解釋 ${}_nq_x$ 和 ${}_nm_x$ 的關係，實際上只需解釋 $l_x$ 和 $L_x$ 之間的關係，在 $(x, x + 1]$ 歲死亡人數所生存的總年數為：

$$\int_0^1 s \cdot l_{x+s} \cdot \mu_{x+s} ds = \int_0^1 l_{x+s} ds - l_{x+1} = L_x - l_{x+1} \quad (2.9)$$

如果將(2.9)式除以 $d_x$ ，就可得到在區間 $(x, x + 1]$ 中死亡的人所生存的平均年齡，因此也稱在此區間死亡的人所生存的平均尾齡，將它定義為：

$$a_x = \frac{L_x - l_{x+1}}{d_x} \quad (2.10)$$

$a_x$ 又稱終壽區間存活成數，經整理後可得：

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - (1 - a_x) \cdot d_x} = \frac{q_x}{1 - (1 - a_x) \cdot q_x} \quad (2.11)$$

另一方面

$$L_x = l_x - (1 - a_x) \cdot d_x \quad (2.12)$$

故

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{d_x}{L_x + (1 - a_x) \cdot d_x} = \frac{m_x}{1 + (1 - a_x) \cdot m_x} \quad (2.13)$$

一般而言，如果考察  $n$  年區間 $(x, x + n]$ ，則

$$\int_0^n s \cdot l_{x+s} \cdot \mu_{x+s} ds = \int_0^n l_{x+s} ds - n \cdot l_{x+n} = {}_nL_x - n \cdot l_{x+n} \quad (2.14)$$

同理，在 $(x, x + n]$ 歲中死亡的人所生存的總年數((2.14)式)除以 ${}_nd_x$ 可得在 $(x, x + n]$ 歲中死亡的人所生存的平均年齡，若再除以  $n$ ，則可得該區間內死亡的人所生存的平均尾齡，將它定義為：

$${}_na_x = \frac{{}_nL_x - n \cdot l_{x+n}}{n \cdot {}_nd_x} \quad (2.15)$$

整理後得

$${}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} = \frac{{}_nd_x}{n \cdot l_x - n \cdot (1 - {}_na_x) \cdot n \cdot d_x} = \frac{{}_nq_x}{n[1 - (1 - {}_na_x) \cdot nq_x]} \quad (2.16)$$

其中

$${}_nL_x = n \cdot l_x - n \cdot (1 - {}_na_x) \cdot n \cdot d_x \quad (2.17)$$

則

$$l_x = \frac{1}{n}[nL_x + n \cdot (1 - n a_x) \cdot n d_x] \quad (2.18)$$

從而有

$$n q_x = \frac{n d_x}{l_x} = \frac{n d_x}{\frac{1}{n}[nL_x + n \cdot (1 - n a_x) \cdot n d_x]} = \frac{n m_x}{\frac{1}{n}[1 + n(1 - n a_x) \cdot n m_x]} \quad (2.19)$$

(2.19)式給出了由 $n m_x$ 得到 $n q_x$ 的一般關係式，這個公式在由人口統計數據對生命表進行估計時是非常重要的。

## § 2.2 年齡 $x$ 之機率密度函數

死亡力的概念： $l_x$ 的導數可解釋為 $l_x$ 的絕對瞬時變化率。因為 $l_x$ 是減函數，因此它的導數為負值，為了得到瞬時死亡率的絕對值，我們用這一導數的負值代替，最後，由於 $l_x$ 的規模對導數大小的影響，通過除以 $l_x$ 得到相對瞬時死亡率：

$$\mu_x = \frac{-\frac{d}{dx} l_x}{l_x} \quad (2.20)$$

稱它為 $x$ 歲的死亡力。

透過一個簡單的變量代換，(2.20)式可寫成

$$\mu_{x+s} = \frac{-\frac{d}{ds} l_{x+s}}{l_{x+s}} \quad (2.21)$$

(2.21)式是死亡力的常用表達式。

我們已介紹了死亡力的概念，接著來看由 $l_x$ 推導出來，以年齡 $x$ 為隨機變量的機率密度函數，由存活機率模型已知

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{s(x)} \quad (2.22)$$

又由於 $\lambda(x) = \mu_x$ ， $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$ ，則

$$f(x) = \mu_x \cdot \frac{l_x}{l_0} = {}_x p_0 \cdot \mu_x, \quad x \geq 0 \quad (2.23)$$

透過機率密度函數 $f(x)$ ，就能求 $E(X)$ (假設期望值都存在，並通常以 $e_0$ 表示)：

$$e_0 = E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x \cdot {}_x p_0 \cdot \mu_x dx \quad (2.24)$$

部分積分得

$$e_0 = E(X) = \int_0^{\infty} {}_x p_0 dx = \frac{1}{l_0} \int_0^{\infty} l_x dx \quad (2.25)$$

若定義

$$T_0 = \int_0^{\infty} l_x dx \quad (2.26)$$

則

$$e_0 = E(X) = \frac{T_0}{l_0} \quad (2.27)$$

定義

$$T_x = \int_x^{\infty} l_y dy = \sum_{y=x}^{\infty} L_y \quad (2.8)$$

則 $T_0$ 是 $T_x$ 的特殊形式。

### § 2.3 條件機率與密度

以下推導為生存到 $x$ 歲的人在 $y$ 歲死亡( $y > x$ )的條件機率密度函數，以知條件機率密度函數為

$$f(y|X > x) = \frac{f(y)}{S(x)}$$

由(2.23)式得 $f(y) = \frac{1}{l_0} l_y \cdot \mu_y$ ，又由 $S(x) = \frac{l_x}{l_0}$ ，而得

$$f(y|X > x) = \frac{l_y \cdot \mu_y}{l_x} = {}_{y-x} p_x \cdot \mu_y \quad (2.28)$$

令 $s = y - x$ ，則 $y = x + s$ ，那麼

$$f(s|X > x) = {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} \quad (2.29)$$

此處隨機變量 $s$ 代表 $x$ 歲的人的未來壽命(以年為單位)。(2.29)式給出的機率密度函數在推導其他結果時仍然十分有用。

如果式(2.21)的分子、分母同除以 $l_x$ ，得

$$\mu_{x+s} = \frac{-\frac{d}{ds} {}_s p_x}{{}_s p_x},$$

即

$$\frac{d}{ds}({}_s p_x) = -{}_s p_x \cdot \mu_{x+s} \quad (2.30)$$

$x$  歲的人未來預期壽命為

$$e_x = E(S) \int_0^{\infty} s \cdot {}_s p_x \cdot \mu_{x+s} ds = \int_0^{\infty} {}_s p_x ds \quad (2.31)$$

由於  ${}_s p_x = \frac{l_{x+s}}{l_x}$ ，上式可化為

$$e_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\infty} L_{x+s} ds = \frac{1}{l_x} \int_x^{\infty} L_y dy = \frac{T_x}{l_x} \quad (2.32)$$

現實生命表的推算，係假設一個虛擬世代十萬人以當年各年齡組的死亡率為準，轉變為死亡機率，遵循此，藉以推算出各年齡組之平均餘命，有諸多類型的生命表推算方法。以下是一簡略生命表的格式：

年齡區間 (歲)	$x_i$ 時的人數	在 $(x_i, x_{i+1})$ 的死亡機率	終壽區間 成數	在 $(x_i, x_{i+1})$ 死去的人數	在 $(x_i, x_{i+1})$ 的生存時間	$x_i$ 以後的生存時間	$x_i$ 時觀察平均餘命
$(x_i, x_{i+1})$	$l_i$	$q_i$	$a_i$	$d_i$	$L_i$	$T_i$	$e_i$
$(x_0, x_1)$	$l_0$	$q_0$	$a_0$	$d_0$	$L_0$	$T_0$	$e_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$ 及以上	$l_n$	$q_n$	$a_n$	$d_n$	$L_n$	$T_n$	$e_n$

表 1 則是內政部統計處提供的台灣地區 104 年的五齡組生命表

表 1 104 年台灣地區五齡組簡易生命表

104年臺灣地區簡易生命表						兩性
年齡 x	死亡機率 qx	生存數 lx	死亡數 dx	定常人口		平均餘命 ex
				Lx	Tx	
0	0.00418	100000	418	99653	8018544	80.19
1-4	0.00088	99582	88	398115	7918891	79.52
5-9	0.00047	99495	47	497352	7520776	75.59
10-14	0.00063	99448	63	497112	7023424	70.62
15-19	0.00171	99386	170	496540	6526312	65.67
20-24	0.00223	99216	221	495540	6029772	60.77
25-29	0.00275	98995	272	494323	5534232	55.90
30-34	0.00401	98723	396	492700	5039908	51.05
35-39	0.00667	98327	656	490119	4547209	46.25
40-44	0.01054	97670	1029	485959	4057090	41.54
45-49	0.01593	96641	1540	479572	3571130	36.95
50-54	0.02201	95102	2093	470506	3091558	32.51
55-59	0.02996	93008	2786	458422	2621052	28.18
60-64	0.04285	90222	3866	441963	2162630	23.97
65-69	0.06513	86355	5625	418641	1720666	19.93
70-74	0.10502	80731	8478	383786	1302025	16.13
75-79	0.16589	72253	11986	332738	918239	12.71
80-84	0.25444	60267	15334	264153	585501	9.72
85+	1.00000	44933	44933	321347	321347	7.15

將以上小節的所有關係式做一個統整(Keyfitz, 1977; Namboodiri & Suchindran, 1987; Kleinbaum 1996; Le, 1997 及周江雄等 2001), 並就存活隨機模型和生命表模型做個對照, 可了解生存模型的性質和特點, 現將基本概念、符號和公式整理如以下表 2。

表 2 存活模式與生命表函數對照表

概念	存活模式	生命表函數
1. 由 0 歲生存到 $x$ 歲的機率	$S(x)$	${}_x p_0 = \frac{l_x}{l_0}$
2. $x$ 歲以前死亡的機率	$F(x)$	${}_x q_0 = \frac{l_0 - l_x}{l_0}$
3. $x$ 歲的人生存到 $(x+n)$ 歲的機率	$\frac{S(x+n)}{S(x)}$	${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$
4. $x$ 歲的人在 $(x+n)$ 歲前死亡的機率	$\frac{S(x) - S(x+n)}{S(x)}$	${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_n d_x}{l_x}$
5. $x$ 歲的風險率	$\lambda(x) = \frac{-\frac{d}{dx} S(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \ln S(x)$	$\mu_x = -\frac{\frac{d}{dx} l_x}{l_x} = -\frac{d}{dx} \ln l_x$
6. $x$ 歲的死亡密度函數	$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = -\frac{d}{dx} S(x)$	${}_x p_0 \mu_x = -\frac{d}{dx} {}_x p_0$
7. 新生人口的未來預期壽命	$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx$ $= \int_0^{\infty} S(x) dx$	$e_0 = \int_0^{\infty} x \cdot {}_x p_0 \cdot \mu_x dx$ $= \int_0^{\infty} {}_x p_0 dx = \frac{T_0}{l_0}$
8. 在區間 $(x, x+1]$ 上的年齡別死亡率	${}_n m_x = \frac{\int_0^n S(x+s) \cdot \lambda(x+s) ds}{\int_0^n S(x+s) ds}$	${}_n m_x = \frac{\int_0^n l_{x+s} \cdot \mu_{x+s} ds}{\int_0^n l_{x+s} ds} = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$
9. 暴露數的概念		${}_n L_x = \int_0^n l_{x+s} ds$ $T_x = \int_x^{\infty} l_y dy = \sum_{y=x}^{\infty} L_y$

## 參、生命表衍生性公式及其應用

生命表函數可衍生出一些重要訊息，本章彙整有關形式人口學相關文獻所推導之數學公式，說明生命表函數與死亡率、人口指標之關係，探討生命表函數 $\mu(x)$ 、 $l(x)$ 、 $T(x)$ 、 $e(x)$ (如前述 $\mu_x$ 、 $l_x$ 、 $T_x$ 及 $e_x$ )相關衍生性公式及其應用。

生命表函數 $l(x)$ 、 $\mu(x)$ 及 $e(x)$ 三者為最重要的隨機變數，分別代表存活機率、風險死亡力及平均餘命，其相互關係如 $l(x)\mu(x)e(x)$ 、 $l(x)\mu(x)$ 、 $l(x)e(x)$ 、 $\mu(x)e(x)$ ，由此衍生出生命表中某些特性及其應用，並加以詮釋之。

### (1) 生命表函數 ( $l(0) = 1$ )

$$\text{機率密度函數： } f(x) = l(x)\mu(x) = d(x) = \frac{d}{dx}(1 - l(x)) = -\frac{dl(x)}{dx}$$

$$\text{存活函數： } l(x) = \int_x^w d(a)da = \int_x^w l(a)\mu(a)da$$

$$l(x) = \frac{e(0)}{e(x)} \exp\left[-\int_0^x \frac{1}{e(a)} da\right]$$

(Finkelstein & Vaupel, 2009)

$$x\text{歲後之總生存時間函數： } T(x) = \int_x^\infty l(a)da = e(x)l(x) = e(0)\exp\left[-\int_0^x \frac{1}{e(a)} da\right]$$

$$\text{風險函數： } \mu(x) = -\frac{d}{dx} \ln l(x)$$

$$\frac{d \ln(\mu(x))}{dx} = \frac{\frac{d}{dx} \mu(x)}{\mu(x)} \text{ (生命表年齡 } x \text{ 老化速率) (Goldstein and Cassidy, 2012)}$$

$$x\text{歲平均餘命： } e(x) = \int_x^w al(a)\mu(a)da = \frac{1}{l(x)} \int_x^\infty l(a)da$$

$$0\text{歲平均餘命： } e(0) = \int_0^w al(a)\mu(a)da = \int_0^w l(a)da = T(0)$$

### (2) 生命表平均年齡與平均餘命

$$\bar{a} = \frac{\int_0^w al(a)da}{e(0)}, \quad \bar{e} = \frac{\int_0^w e(a)l(a)da}{e(0)}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\int_x^\infty l(a)\mu(a)da}{\int_x^\infty l(a)da} = \frac{1}{e(a)}, \quad \bar{a}e_0 = \int_0^w T(a)da$$

(3) 生命表平均餘命變方

$$\sigma_{e_a}^2 = \frac{2 \int_x^\infty T(a) da}{l(a)} - (e_a)^2 = \sum_{a=1}^w (x - e(a))^2 p(x+a) \quad , \quad p(x+a) = \frac{l(x+a) - l(x+a+1)}{l(x+a)}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{e_0}^2 &= \frac{2 \int_0^w T(a) da}{l_0} - (e_0)^2 = \int_0^\infty e^2(a) f(a) da = \int_0^\infty a^2 f(a) da - e_0^2 \\ &= \int_0^\infty a^2 da - e_0^2 = 2\bar{a}e_0 - e_0^2 \end{aligned}$$

(4) 衍生性數學公式

$$\int_0^w l(x)\mu(x)e(x)dx \rightarrow \int_0^w d(x)e(x)dx \rightarrow \frac{\int_0^w d(x)e(x)dx}{e(0)} = H$$

$$\int_0^w d(x)e(x)dx - e_0 = (H - 1)e_0 \quad , \quad \text{衰老指標}$$

$$\int_0^w l(x)\mu(x)dx = \int_0^w d(x)dx$$

$$\int_0^w l(x)e(x)dx \rightarrow \frac{\int_0^w e(x)l(x)dx}{e(0)} = \bar{e} \quad , \quad \int_0^\infty l(x)e(x)dx = \int_0^\infty x l(x)dx$$

$$\int_0^w \mu(x)e(x)dx \rightarrow e(x) - e(0) + x$$

(5) 死亡率指標

$$H(\text{熵}) = \frac{-\int_0^w l(x) \ln l(x) dx}{\int_0^w l(x) dx} = \frac{\int_0^w l(x) e(x) \mu(x) dx}{\int_0^w l(x) dx} = \frac{\int_0^w T(x) e(x) \mu(x) dx}{\int_0^w T(x) dx} \cong 2 - \frac{e(0)}{\bar{a}}$$

熵係由 keyfitz(1977)所提出，做為死亡率對平均餘命影響的指標

$$G(\text{Gini 係數}) = 1 - \frac{1}{e_0} \int_0^w [l(x)]^2 dx$$

Gini 係數係做為生命長度不平等之測度，當死亡年齡變異下降時，值會下降(Wilmoth and Horiuchi, 1999)

根據上述生命表衍生性公式，我們可以進一步推廣應用窺其堂奧，茲列舉以下數則應用分析：

### § 3.1 存活別死亡力倒數之死亡加權平均推算平均餘命

生命表中的最終年齡 $\omega$ 可以是無限或有限，若 $\omega = \infty$ ，則某些人可活過一些界限，假設 $l(0) = 1$ 且 $l(\omega) = 0$ ，若 $l(x)$ 為連續且在 $x$ 歲時是可微分函數，其 $x$ 範圍為 $[0, \omega]$ ，則年齡別死亡力函數為

$$\mu(x) = \frac{-1}{l(x)} \frac{dl(x)}{dx} \quad (3.1)$$

$\mu(x) > 0$ ， $l(x)$ 為從 $l(0)$ 至 $l(\omega)$ 之遞減函數，故在年齡區間 $[0, \omega]$ 是一對一對應，且其百分比 $s$ 在世代之 $[0, 1]$ 存活於大於年齡 $x$ 。若 $s = l(x)$ 是一對應之生命表函數，即意謂 $s$ 為 $x$ 之函數。然就另一方面而言， $x$ 亦可視為 $s$ 之函數，對所有 $0 \leq x \leq \omega$ ，在 $\mu(x) \geq 0$ 的， $a(s) = x$ 若且唯若 $l(x) = s$ 。

同理對任何在 $0 \leq s \leq 1$ 中之 $s$ ，Cohen(2010)定義 $a(\frac{1}{2})$ 為一半世代死亡力中之生命長度。存活別死亡力 $\lambda(s)$ 與年齡別死亡力 $\mu(x)$ 有如下三種對應：

$$\text{若 } s = l(x), \lambda(s) = \mu(x); \text{ 或 } \lambda(s) = \mu(a(s)); \text{ 或 } \lambda(l(x)) = \mu(x) \quad (3.2)$$

就年齡 $x$ 言 $e(x)$ 即是其平均餘命可以寫成如下公式

$$e(x) = \frac{1}{l(x)} \int_x^{\omega-x} (y-x) l(y) \mu(y) dy \quad (3.3)$$

將(3.1)代入(3.3)中之 $\mu(y)$ 可得

$$e(x) = \frac{1}{l(x)} \int_x^{\omega} l(x) dx \quad (\text{Keyfitz, 1968}) \quad (3.4)$$

若 $\mu(x)$ 在任何年紀為一常數 $k$ ，且 $k > 0$ ，則生命表中 $l(x) = \exp(-kx)$ ，

$$\text{則} \quad e(x) = \frac{1}{k} \quad (3.5)$$

根據(3.2)，存活別死亡力， $\lambda(s) = k > 0$ ，若且唯若，若生命表是為參數 $k$ 之負指數分配， $k$ 可視為年齡別或存活別死亡力之常數，當 $k$ 不為常數時(3.5)式可推導如下：

$$e(x) = \frac{1}{l(x)} \int_0^{l(x)} \frac{1}{\lambda(s)} ds \quad (3.6)$$

當  $\lambda(s) = k$  時

$$\text{上式可為} \quad \frac{1}{l(x)} \int_0^{l(x)} k ds = 1 \quad (3.7)$$

在不考慮過去存活年數，吾等可定義一存活別機率平均餘命  $E(s)$ ，其中世代存活機率为  $s$ 。若  $s = l(x)$  則  $E(s)=e(x)$ ，同樣地， $E(s)=e(a(s))$  且  $E(l(x))=e(x)$ ，故

$$E(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\lambda(s')} ds' \quad (3.8)$$

$s'$  係一變動的變數，存活函數  $s$  係存活別死亡力之死亡加權平均，(3.6)與(3.8)的差異主要在於年齡  $x$  在(3.7)之兩邊，而沒有在(3.8)式中出现，此亦可顯示死亡力之存活別形式

$$\lambda(s) = -\frac{1}{s} \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{s} \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

就  $s = l(x)$ ，即  $s' = l(x')$ ，可得

$$\begin{aligned} E(s) &= e(x) \\ &= \frac{1}{l(x)} \int_x^w \frac{1}{\mu(x')} \frac{dl(x')}{dx'} dx' \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s \frac{1}{\lambda(s')} \left(\frac{dx}{ds'}\right)^{-1} dx \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s \frac{ds'}{\lambda(s')} \end{aligned} \quad (3.10)$$

事實上，Cohen(2010)指出，當  $l(0) = 1$  時， $e(0) = \int_{l=0}^1 \frac{1}{\lambda(l)} dl$

$$\text{且} \quad e(x) = \frac{1}{l(x)} \int_0^{l(x)} \frac{dl}{\lambda(l)} \geq \frac{l(x)}{\int_0^{l(x)} \lambda(l) dl} \quad (3.11)$$

就存活機率为  $s$  而言， $a(s)$ ， $\lambda(s)$  及  $E(s)$  係其所對應之年齡，存活別死亡力及平均餘命。相對於  $l(x)$ ， $\mu(x)$  及  $e(x)$  對應於年齡  $x$  之圖形，顯然  $s$  亦可做為年齡、死亡力及平均餘命的函數，藉由  $a(s)$ ， $\lambda(s)$  及  $E(s)$  對應於存活機率为  $s$  之圖形從另一面向探究年齡，存活別

死亡力及平均餘命對應於存活機率趨勢。

以圖 1 台灣 2016 年生命表資料為例：

從圖形研判，A 圖為年齡別存活曲線圖，下降斜率絕對值在 40 歲之前幾乎為 0，40 歲後開始緩降至 70 歲，之後近乎呈直線下降；D 圖則為存活別年齡圖，存活機率從 0 上升至 0.8，相對於年齡直線從 100 歲緩降至 70 歲；爾後的斜率在存活機率對應之年齡 60 歲以下呈矩形化驟降，其對應的存活機率約為 0.9，年齡 40 歲以下存活別機率在 0.98 以上，斜率已近 $-\infty$ ，年齡隨著存活機率的升高而驟降，此可輔助 A 圖說明年齡與存活機率間之關係；B 圖為年齡別死亡力圖，在 50 歲之前之風險幾乎為 0，死亡率在 0.1 以下，50 歲後緩增，到了 80 歲其風險才快速上升，呈指數成長曲線；E 圖存活別死亡力圖，其死亡力隨著存活機率的上升而下降，其在 0.05 以上相對於存活機率呈曲線下降的形式，0.05 以下則為直線下降趨勢，其對應的存活機率為 0.8~1；C 圖為年齡別平均餘命圖，在年齡 0 歲到 25 歲時，平均餘命從 80 歲到 55 歲呈直線下降，爾後降幅稍緩，到 85 歲後降幅更小；F 圖則是存活別平均餘命圖，其函數呈指數成長，在存活機率 0.8 之前緩升，爾後曲線斜率快速上升，對應於存活機率之年齡差異隨存活機率上升而快速增加，在 60 歲以上其存活機率幾乎接近於 1 到達了極限。若從右至左方向就存活機率下降的角度而言，在高存活機率時，存活平均餘命損失極大，呈指數驟降趨勢，而當  $s$  更進一步下降至 0.7 以下，則其存活平均餘命之下降減緩許多，特別是在 10 年以下。

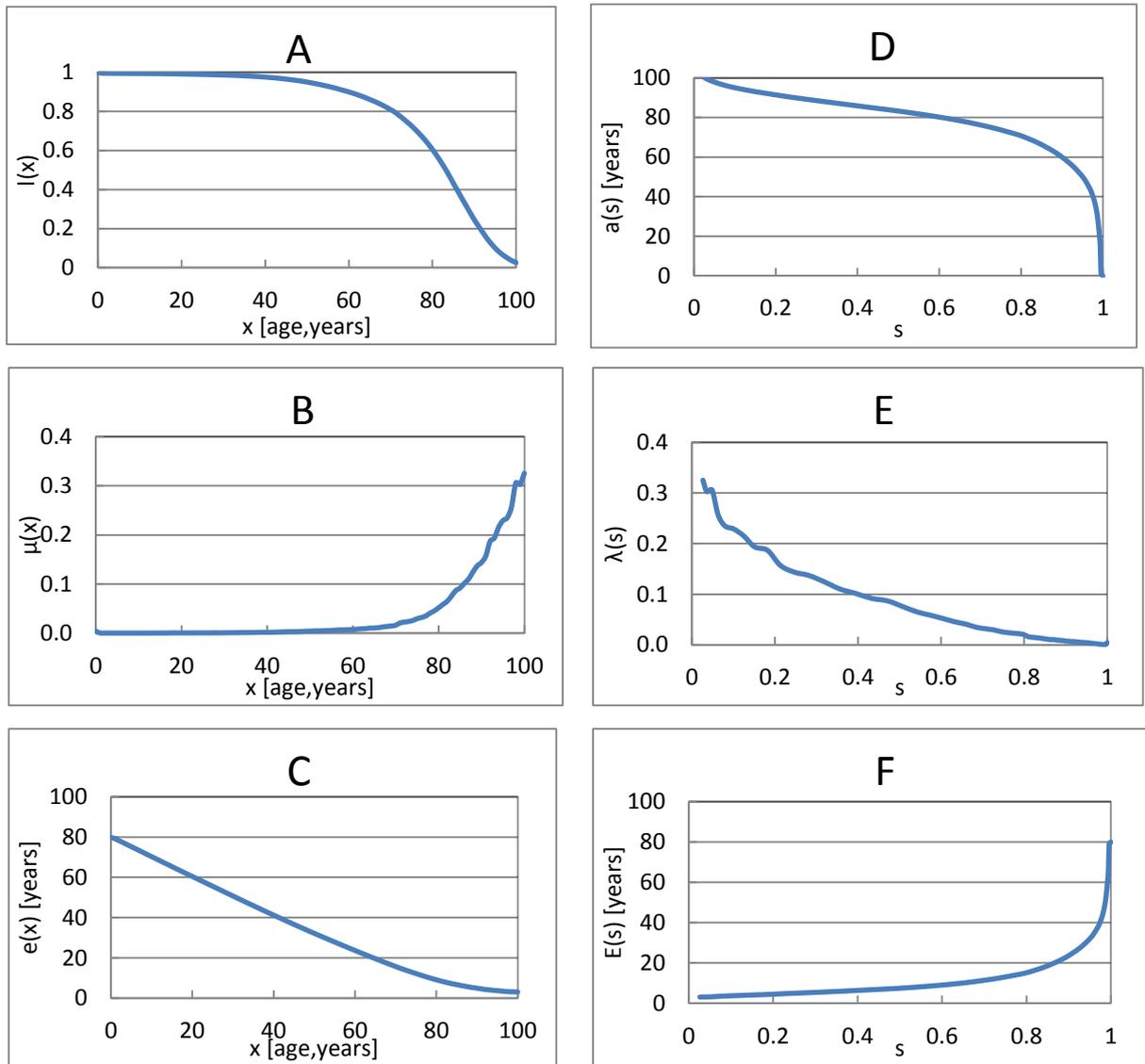


圖 1 2016 年存活函數和年齡分別對應之年齡、存活機率、死亡力及平均餘命

### § 3.2 平均餘命變方

根據§ 2.2，已知

$$E(X) = \frac{1}{l_0} \int_0^{\infty} l_x dx \quad (2.12)$$

及

$$T_x = \int_x^{\infty} l_y dy \quad (2.15)$$

$$\text{而 } E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx \quad (3.12)$$

經部分積分為

$$E(X^2) = \frac{2}{l_0} \int_0^{\infty} x l_x dx = \frac{2 \int_0^{\infty} T_x dx}{l_0} \quad (3.13)$$

$$\text{因 } \frac{dT_x}{dx} = -l_x$$

$$\text{則新生人口平均餘命之變方, } \sigma_{e_0}^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2 \int_0^{\infty} T_x dx}{l_0} - (e_0)^2 \quad (3.14)$$

$$\text{同理, } x \text{歲平均餘命之變方, } \sigma_{e_x}^2 = \frac{2 \int_x^{\infty} T_x dx}{l_x} - (e_x)^2 \quad (3.15)$$

此和 Chiang(1984)所得結果雷同，其結果如下：

假設  $Y_\alpha$  為某一  $x_\alpha$  歲者之未來年齡， $\hat{e}_\alpha$  為某一  $x_\alpha$  歲後  $l_\alpha$  人之平均餘命

$$\bar{Y}_\alpha = \frac{1}{l_\alpha} \sum_{k=0}^{l_\alpha} Y_{\alpha k}, \text{ 則 } \hat{e}_\alpha = \bar{Y}_\alpha, E(\hat{e}_\alpha) = E(Y_\alpha) \quad (3.16)$$

$$\text{Var}(\hat{e}_\alpha) = E\left(\frac{1}{l_\alpha}\right) \text{Var}(Y_\alpha) \quad (3.17)$$

而  $\text{Var}(Y_\alpha)$  中的  $f(y_\alpha) dy_\alpha$  則為

$$f(y_\alpha) dy_\alpha = \exp\left[-\int_{x_\alpha}^{x_\alpha+y_\alpha} \mu(\tau) d\tau\right] \mu(x_\alpha + y_\alpha) dy_\alpha \quad (3.18)$$

故

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{e}_\alpha) &= E\left(\frac{1}{l_\alpha}\right) \int_0^{\infty} (y_\alpha - e_\alpha)^2 f(y_\alpha) dy_\alpha \\ &= \sum_{i=\alpha}^{w-1} p_{\alpha i}^2 [(1 - a_i) n_i + e_{i+1}]^2 \text{Var}(\hat{p}_i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

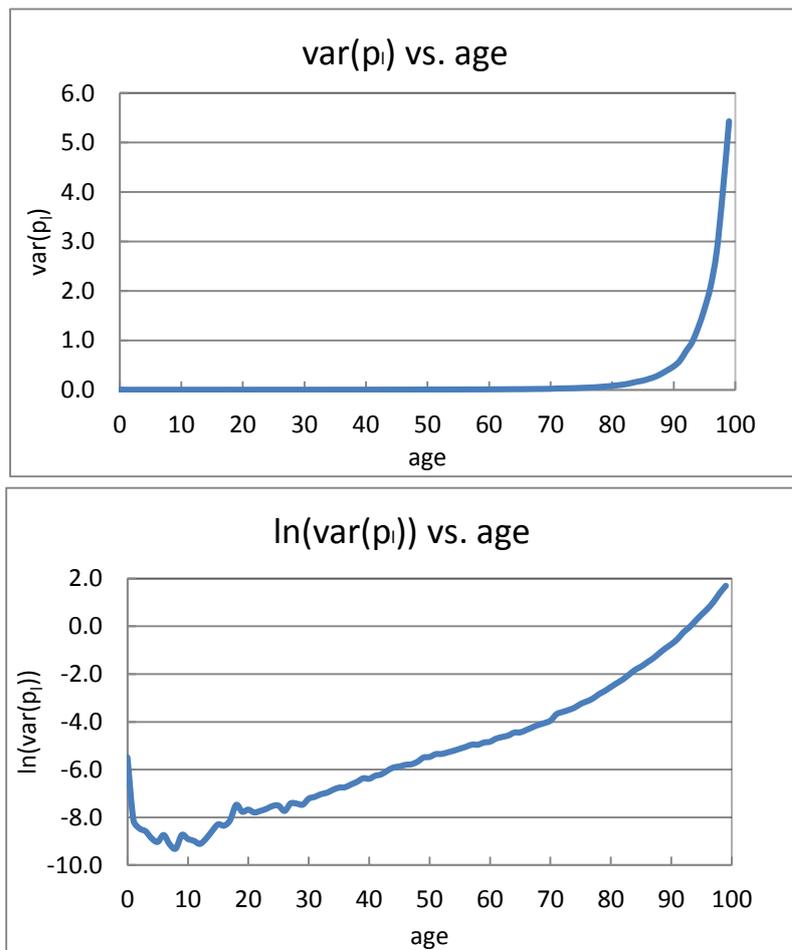
$a_i$  為終壽區間存活成數

(3.19)整理完可得

$$\text{Var}(\hat{p}_i) = E\left(\frac{1}{l_i}\right) p_i q_i \cong \frac{1}{E(l_i)} p_i q_i \quad (3.20)$$

(3.15)和(3.19)可以得到相同結果

將 $\text{Var}(\hat{e}_\alpha)$ 及 $\text{Var}(\hat{p}_i)$ 隨著年齡作圖(如圖 2)，從圖看來，存活機率 $p_i$ 變方在 80 歲之前其值接近 0，呈水平變動，而 80 歲之後似指數曲線成長，顯示在老齡前的存活機率差異不大，80 歲是一個門檻，相較於年輕族群，高齡者身體狀況變化差異大；另一方面平均餘命的變方則是隨著年齡的增加而遞減，在 0 歲時的變異最大，爾後持續下降，似乎到了 50 歲左右，在斜率上有些微的變動，愈到高齡其變異愈小，表示高年齡組組內平均餘命較為接近，也就表示大家的死亡年齡大致相同，此與存活曲線矩形化有些關聯，會在之後的章節多做介紹。



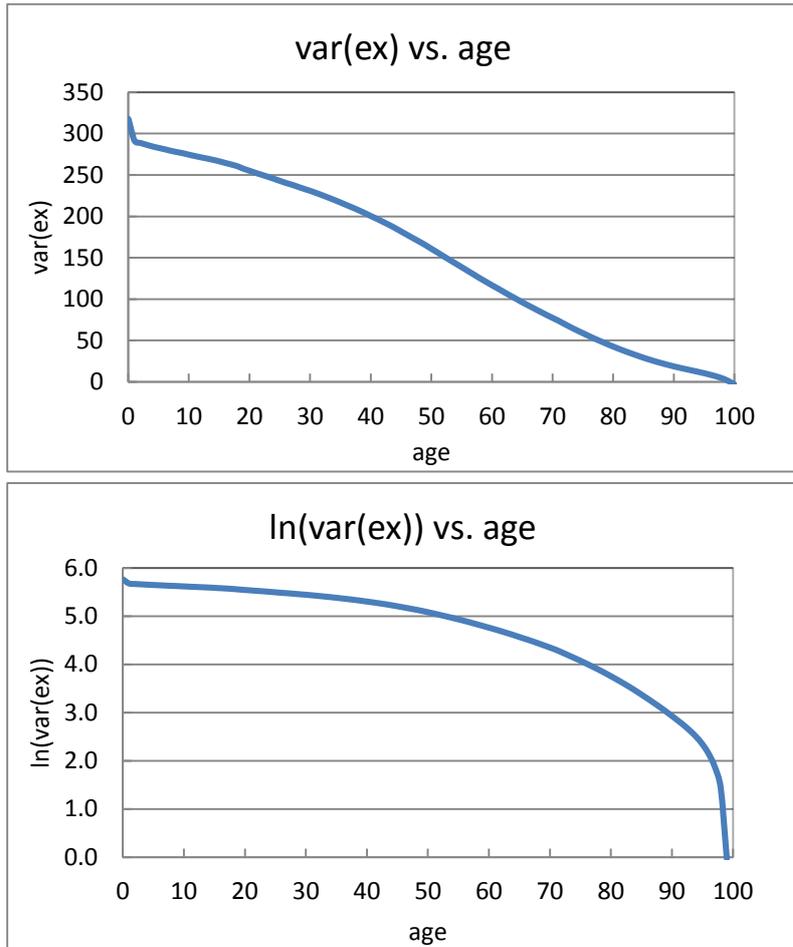


圖 2 2016 年存活機率變方、平均餘命變方與年齡趨勢圖

### § 3.3 生命存活與平均餘命

靜止人口是指人口總數長期保持不變，每年出生人數與死亡人數總是相等的人口。靜止人口是人口再生產方式中最簡單的情形，它有一個假設的先決條件，即是一個封閉條件下的人口，也就是說它是一個沒有人口遷移現象的人口，其具有下列三個性質：

1. 每年出生人數( $B$ )和死亡人數( $D$ )相等。
2. 各年齡組的人數( $P_x$ )不變，人口年齡結構始終不變。
3. 出生率( $b$ )和死亡率( $m$ )相等，且與平均餘命( $e_0$ )互為倒數，即  $b = m = \frac{1}{e_0}$ 。

就第一個性質而言，既然靜止人口的總人數永遠不變，可見每年的出生人數與死亡人數正好相抵，即兩者的數值相等，否則總人數不可能保持靜止不變；第二個性質則說明靜止人口不僅總人數不變，且各年齡組人數及其在總人數所占的比重也不變，男女分開也是如此，由此可見，靜止人口不存在老化或年輕化的問題；第三個性質則是已知總人數等於各年齡組的人數總和，而各年齡組的人口數又等於出生人數與各年齡生存率之乘積，即：

$$P = \sum_{x=0}^{w-1} P_x$$

而

$$P_x = B \times L_x$$

所以

$$P = \sum_{x=0}^{w-1} B L_x = B \sum_{x=0}^{w-1} L_x \quad (3.21)$$

其中  $P$  為總人數， $P_x$  為各年齡組人口數， $B$  為出生人數， $L_x$  為各年齡組生存率。

由於各年齡組生存率的總和，即  $\sum L_x$  等於平均餘命  $e_0$ ，根據(3.21)式便有：

$$P = B e_0 \quad (3.22)$$

也就是靜止人口的總人數等於年出生人數  $B$  與平均餘命  $e_0$  的乘積，利用此固定的總人數，可求得靜止人口的出生率  $b$  和死亡率  $m$ ，如下：

$$b = \frac{B}{P} = \frac{B}{Be_0} = \frac{1}{e_0} \quad (3.23)$$

(3.23)式顯示靜止人口的出生率  $b$  與平均餘命  $e_0$  互為倒數，又由於靜止人口每年的出生人數等於死亡人數，死亡率  $m$  等於出生率  $b$ ，所以靜止人口的死亡率與平均餘命也互為倒數，即：

$$b = m = \frac{1}{e_0} \quad (3.24)$$

(3.24)式指出一個靜止人口如果平均餘命愈短，其出生率和死亡率會愈高，人口更替速度就愈快；反之，若平均餘命愈長，其出生率與死亡率便愈低，人口更替速度就會愈慢。例如一個平均餘命為 35 歲的靜止人口，根據(3.24)式，其出生率與死亡率為  $28.57\text{‰}$  ( $\frac{1}{35}=0.02857$ )；若是一個平均餘命為 50 歲的靜止人口，則其出生率和死亡率為  $20\text{‰}$ ；而平均餘命為 75 歲的靜止人口，每年的出生率和死亡率則只有  $13.33\text{‰}$ ；從此一性質來說，生命表就是一個靜止人口模型。

在生命表中，0 歲的生存人數 10 萬，就是靜止人口每年的出生人數和死亡人數；平均總人年數  $L_x$  即靜止人口各年齡組的人口數；靜止人口各年齡組的死亡率  $m = \frac{L_x}{T_x} = \frac{1}{e_0}$ ，出生率  $b = \text{死亡率 } m = \frac{l_0}{T_0} = \frac{1}{e_0}$ ，而 0 歲的未來生存人年數  $T_0$ ，就是靜止人口的總人口數  $P(P=100,000 \times e_0)$ 。

在現實生活中，靜止人口只出現在特殊條件下，一種是在古代，人類的社會生產力極低，經常忍飢挨餓，受到各種野獸傷害、疾病侵襲，死亡率很高，每年生育僅足以補償死亡，人口數基本保持不變；另一種則是在現代，有些國家的人口死亡率已降到很低水平，出生率也人為地控制到與此相應的低水平，二者基本相等，長期保持下去就會形成靜止人口。

靜止人口模型是人口研究一個有用的工具，利用它可以確定：(1)在現有分年齡死亡率水平下，一個靜止人口的年齡結構。(2)在現有平均餘命水平下，人口達到靜止時的出

生率和死亡率。(3)為了使人口總數保持在某一水平上，每年出生人數應該控制在多少。

令年齡  $a$  之平均餘命為  $e(a)$ ， $l(a)$  為年齡  $a$  之存活機率，就一靜止人口族群而言，年齡  $a$  之密度為  $\frac{l(a)}{e(0)}$ ，則平均存活及平均餘命的平均分別如下

$$\bar{a} = \frac{\int_0^w a l(a) da}{e(0)} \quad (3.25)$$

$$\bar{e} = \frac{\int_0^w e(a) l(a) da}{e(0)} \quad (3.26)$$

且  $\bar{a} = \bar{e}$  (Goldstein,2009)

Kim & Aron (1989)亦曾利用部用積分之方法，得到相同結果，在成長穩定的族群中  $\bar{e} > \bar{a}$ ，而縮減的穩定族群則為  $\bar{e} < \bar{a}$ 。

靜止人口的平均年齡  $a$  也可表為

$$\bar{a} = \frac{e(0) + \frac{\sigma^2}{e(0)}}{2} = \frac{e(0)}{2} (1 + CV^2) \quad (3.27)$$

其中死亡年齡的變方及變異係數分別為  $\sigma^2$  及  $CV$ ，而  $CV = \frac{\sigma}{e(0)}$ 。

存活時間和剩餘時間之消長與族群老化有關， $\bar{a}$  增加意謂人口數老化，但  $\bar{e}$  上升似乎顯示族群年輕化。在靜止人口族群中  $\bar{a} = \bar{e}$ ，意謂著死亡率的下降對  $\bar{a}$ 、 $\bar{e}$  兩者的影響是等量的增加。Sanderson & Scherbov (2005)指出群體的老化或年輕化，取決於個人觀點，

$\frac{\bar{a}}{\bar{a} + \bar{e}}$  可視為相對老化的指標，其值介於 0、1 間， $\frac{1}{2}$  即是靜止人口族群。

惟 Goldstein(2012)指出，靜止群體中平均餘命等於已存活之生命族群平均年齡的期望值，接近於平均年齡，但並不相等。

$$\bar{e}_x = \bar{x} \quad (3.28)$$

係指生命表中年齡分配成比例，就靜止群體而言，所有個體平均餘命的平均值等於其平均年齡，Lotka 並未推導之，但 Spurgeon(1929)給了證明。

Lotka(1998)指出「相等」意謂著生命表中隨機個人之期望年齡，即是平均餘命，「個人」係指在生命歷程中半途的樣本，Goldstein(2012)並補充說明指出生命表中隨著個人平均年齡 $\bar{a}$ 在一生中只是接近而已，並非是真正的值，故以  $e(\bar{a})=\bar{a}$  示之，而非以 Lotka 下標的方式  $e_{\bar{x}} = \bar{x}$  表示，因為平均死亡年齡應是  $e(\bar{a})+\bar{a}=2\bar{a}$ ，故  $\bar{a}=\frac{1}{2}(e(\bar{a})+\bar{a})$ 。

事實上 Lotka 討論過  $e(\bar{a})=\bar{a}$ ，雖然有「等號」，但其內容是明指其為漸進，他曾證明了在死亡率遵循 De Moivre 線性存活曲線時，等號是成立的，但在一般情況下並非如此<sup>1</sup>。事實上，在低死亡率之生命表， $e(\bar{a})$ 會低於 $\bar{a}$ (等於 $\bar{e}$ )1 年以上，Goldstein(2012)指出瑞典 2008 年之生命表中  $e(\bar{a})$ 為 40.5 年而 $\bar{a}$ 則為 41.7 年，此一差異係和 Jensen 不等式有關，可以說明  $e(a)$ 在年齡  $a$  是上凸的，即 $\bar{e} > e(\bar{a})$ ；反之，若為下凹則  $e(\bar{a}) > \bar{e}$ 。

利用動差函數之泰勒二階漸進展開式(Rice, 1995)可得到如下結果

$$\bar{e} \approx e(\bar{a}) + \frac{e''(a)}{2} \sigma_a^2 \quad (3.29)$$

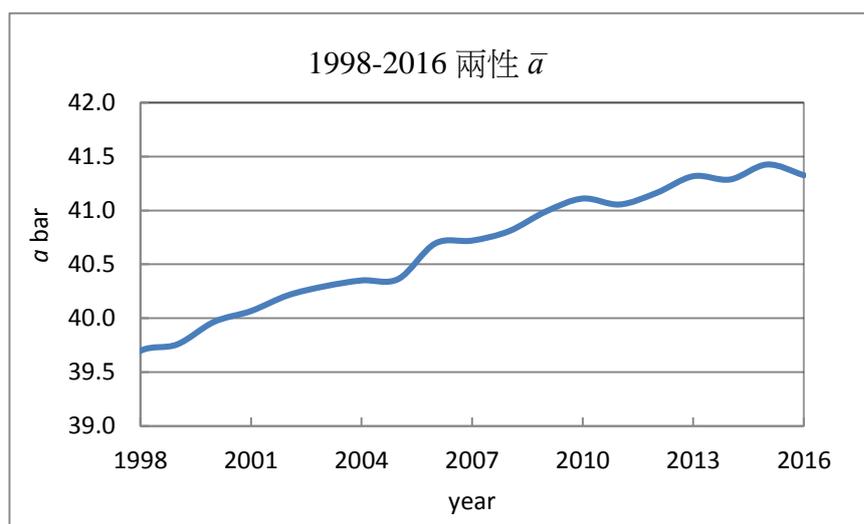
$\bar{a}$ 為靜態人口平均餘命， $e''(a)$ 為平均餘命  $e(a)$ 對年齡  $a$  之二次導數， $\sigma_a^2$ 為年齡  $a$  之變方。在 De Moivre 存活曲線中，平均餘命是為線性，故 Lotka 得到一個明確的結果。實際上在生命表中， $e(a)$ 在年輕時是下凹，而在年老則為上凸，Lotka 由於此一幸運的巧合，抵銷了上述誤差，而得到一個近似精確結果。

我們利用台灣 1998-2016 資料計算 $\bar{a}$ 、 $\bar{e}$ (如表 3、圖 3)。圖 3 顯示 $\bar{a}$ 、 $\bar{e}$ 在 1998-2016，這 20 年間均有上升的趨勢，且 $\bar{e} > \bar{a}$ 族群是在成長中，惟二者差距正在減小中， $\frac{\bar{a}}{\bar{a}+\bar{e}}$ 靠近 0.5 顯示族群邁向老化。

<sup>1</sup> De Moivre 定律係假設終極年齡  $w$  為其參數，此一定律設定新生兒的存活機率為：  
 $s(x) = 1 - \frac{x}{w}$ ， $0 \leq x < w$ ，其死亡機率  ${}_tq_x = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{t}{w-x}$ ，風險函數為  $\mu(x+t) = \frac{1}{w-(x+t)}$ ，  
 $0 \leq t < w-x$ ，且其未來生命隨機變數  $T(x)$ 在  $(0, w-x)$ 呈均勻分配，De Moivre 可用於生命表中，間斷存活模式之線性插補。

表 3 1998-2016 年靜止人口的平均存活與平均剩餘之生命

年代	$\bar{a}$	$\bar{e}$	$\bar{e}-\bar{a}$	$\bar{a}/(\bar{a}+\bar{e})$
1998	39.70	40.32	0.62	0.4961
1999	39.76	40.40	0.64	0.4960
2000	39.97	40.63	0.67	0.4959
2001	40.07	40.73	0.67	0.4959
2002	40.21	40.94	0.72	0.4955
2003	40.30	41.00	0.70	0.4957
2004	40.35	41.08	0.72	0.4956
2005	40.37	41.07	0.70	0.4957
2006	40.69	41.48	0.78	0.4952
2007	40.72	41.44	0.72	0.4956
2008	40.81	41.46	0.65	0.4960
2009	40.99	41.69	0.70	0.4958
2010	41.11	41.77	0.66	0.4960
2011	41.06	41.68	0.63	0.4962
2012	41.16	41.80	0.63	0.4962
2013	41.32	41.97	0.65	0.4961
2014	41.29	41.89	0.61	0.4964
2015	41.43	42.04	0.61	0.4964
2016	41.33	41.92	0.59	0.4965



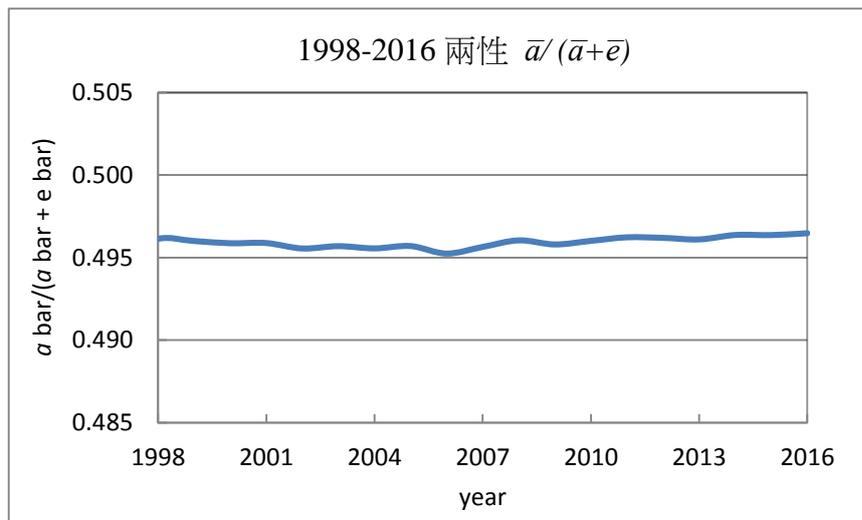
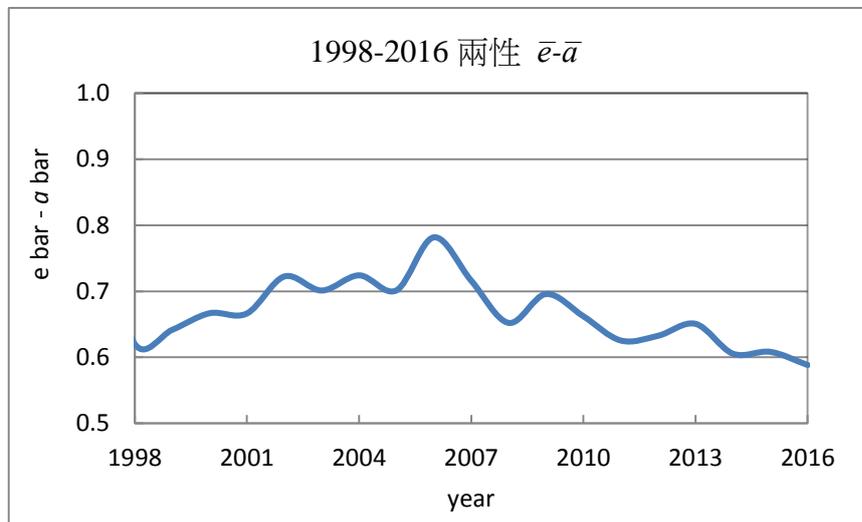
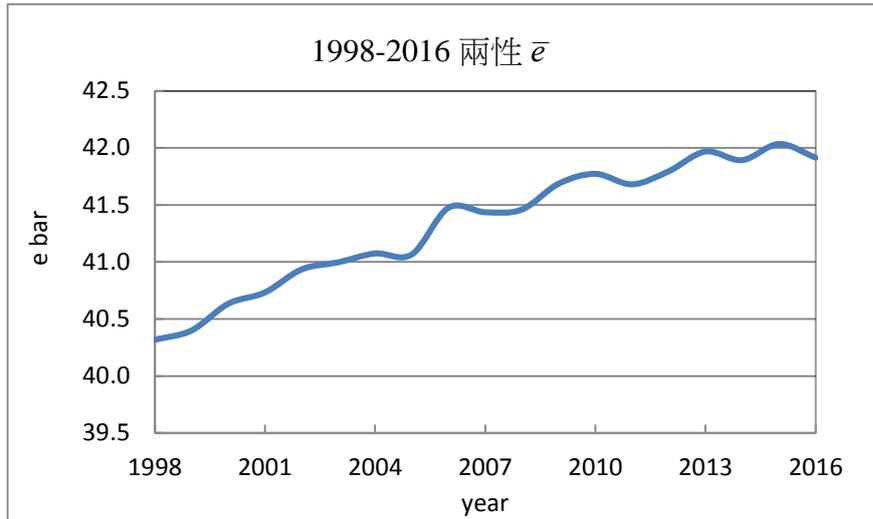


圖 3 1998-2016 年靜止人口平均存活與平均剩餘生命趨勢

#### 肆、死亡年齡變異與存活曲線矩形化關係

生活水準提升以及對疾病的預防與控制得宜，人類的壽命不斷地延長，Fries(1980)指出在死亡率下降、平均餘命增加的過程中，首先是因為傳染病逐漸得到控制，使嬰幼兒死亡率下降至很低的水準，之後則由於生活方式改變，使慢性病發病的時間延後，加上人類基因的限制，使人類 0 歲時平均餘命的上限約落於 85 歲。對應於上述死亡率的變遷，年輕與中年人口的存活率不斷的上升，逐漸朝向接近 1 的方向發展，形成存活曲線趨於水平的態勢。在接近 85 歲時，存活率快速隨年齡而下降，存活曲線趨於垂直，此一過程稱為存活曲線矩形化(rectangularization of the survival curve)。王德睦等(2009)指出台灣 1920-2006 年間的資料顯示，隨著各年齡死亡率的變遷，存活曲線呈現明顯的矩形化發展。

理論上，存活曲線不可能完全矩形化，因為完全矩形化隱含存在特定的壽命極限，所有人存活至壽命極限才可能同時全部消耗殆盡。矩形化係指所有的個體存活到某一極大年齡  $w$ ，然後全體死亡，所以存活機率  $s(x)$  可定義如下：

$$s(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq w \\ 0 & x > w \end{cases}$$

在此種情況下，死亡年齡沒有任何變異，完美地矩形化即是其死亡年齡變異數為 0，儘管此一假設不甚合理，但其仍可做為定義存活曲線矩形化的程度或者死亡年齡分配的變異程度。

Myers and Manton(1984)指出 Fries 對存活曲線矩形化的程度僅由目視來判斷，缺乏客觀的衡量指標。他們以美國 1962-1979 年死亡年齡的平均數以及標準差(SD)來檢驗矩形化論點。如果矩形化確實發生，則隨著平均死亡年齡增加，死亡年齡的標準差會縮減。結果顯示整體的死亡年齡變異確實隨著平均死亡年齡增加而縮小。

Wilmoth and Horichi(1999)利用美國，瑞典及日本 1861-1995 年的生命表資料提供了一相當完整之死亡年齡變異與存活曲線矩形化的關係研究，指出存活曲線矩形化與死亡

年齡分配的變方呈反比關係，即年齡變方愈小，矩形化程度上升。他們運用了十項指標，6項和存活曲線矩形化有關，另外4項則是探討年齡的死亡變異情形，我們利用其中之FR(fixed rectangle, 固定矩形), MR(moving rectangle, 移動矩形)做為矩形化變動之指標，另外IQR(四分位距), SD(標準差), Gini係數及H(熵)做為死亡年齡變異變化趨勢的指標。現簡述如下：

$$1. \quad \text{FR(固定矩形)} \quad \text{FR} = \frac{\int_0^{\phi} S(x) dx}{\phi} \quad (4.1)$$

$$\phi = 100$$

$$2. \quad \text{MR(移動矩形)} \quad \text{MR} = \frac{\int_0^r S(x) dx}{r} \quad (4.2)$$

選定一  $r$  值允許  $s(r) = 0.02$

此兩者值上升即是存活曲線傾向矩形化

$$3. \quad \text{IQR(四分位距)} \quad \text{IQR} = x_2 - x_1 \quad (4.3)$$

$$\text{其中 } S(x_1) = 0.75 \quad S(x_2) = 0.25$$

$x_1, x_2$  為年齡，當死亡年齡變量小時， $x_2 - x_1$  會變小

$$4. \quad \text{SD(標準差, } \sigma)$$

$$\sigma^2 = 2 \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} S(y) dy dx - e_0^2 \quad (4.4)$$

此公式與(3.14)同， $\sigma$ 即為標準差

$$5. \quad \text{Gini 係數}$$

$$G = 1 - \frac{1}{e_0} \int_0^{\infty} [S(x)]^2 dx \quad (4.5)$$

生命長度不平等之測度，當死亡年齡變異下降時，Gini係數會下降(Wilmoth and Horiuchi, 1999)

$$6. \quad \text{熵(Entropy)}$$

死亡率的下降會與壽命的增加有著密切的關係，研究人員藉由統計及數學的概念來詮釋二者間的關係時，提出死亡率與平均餘命變動速率關係之生命表熵(life table entropy)，過去數十年來其被用於探討生命表中存活曲線的彎曲度(convexity)外，亦被做為評估生育的變異(Demetrius, 1979)，死亡率改變對平均餘命的影響

(Demetrius, 1979; Keyfitz, 1977)。有人稱其為存活曲線的熵(Demetrius, 1974)，並利用靜態人口平均年齡來趨近之(Mitra, 1978)，林正祥等(2016)對此有詳細的說明。熵可由間斷趨近公式推算，做為死亡率對平均餘命影響的指標(Shkolnikov and Andreev, 2010)，公式如下：

$$H_x = \frac{\frac{1}{L_x} \times \sum_{y=x}^{w-1} (d_y(e_{y+1} + 1 - a_y)) + \frac{l_w}{2L_x} \times e_w}{e_x} \quad (4.6)$$

其中 $a_y$ (見公式(2.10))為終壽年齡區間成數(Chiang, 1984)

上述 1~2 中，FR、MR 上升意謂存活曲線傾向矩形化；3~6 中，IQR、SD、G 及 H 值下降均意謂死亡年齡變異變小

表 4 1996-2016 年死亡年齡變異與存活曲線矩形化的關係

	矩形化變動指標		死亡年齡變化趨勢指標			
	FR	MR	IQR	SD	G(Gini 係數)	H
1996	0.750	0.750	17.8	19.0	0.110	0.167
1997	0.756	0.756	17.8	19.0	0.109	0.167
1998	0.757	0.757	17.8	19.1	0.109	0.168
1999	0.759	0.759	17.8	19.1	0.109	0.169
2000	0.765	0.765	17.7	18.9	0.107	0.166
2001	0.767	0.767	17.8	18.9	0.106	0.166
2002	0.772	0.764	17.5	18.7	0.105	0.165
2003	0.773	0.766	17.5	18.7	0.104	0.163
2004	0.774	0.767	17.6	18.8	0.105	0.164
2005	0.774	0.767	17.6	18.8	0.105	0.164
2006	0.781	0.767	17.8	18.9	0.105	0.165
2007	0.783	0.775	17.4	18.6	0.102	0.160
2008	0.785	0.777	17.2	18.4	0.100	0.155
2009	0.789	0.782	17.2	18.4	0.100	0.155
2010	0.792	0.785	16.8	18.2	0.098	0.151
2011	0.791	0.783	16.7	18.2	0.097	0.150
2012	0.794	0.786	16.6	18.1	0.096	0.148
2013	0.798	0.790	16.6	18.0	0.095	0.147
2014	0.797	0.789	16.5	17.9	0.094	0.145
2015	0.800	0.792	16.4	17.9	0.094	0.144
2016	0.798	0.790	16.1	17.8	0.093	0.143

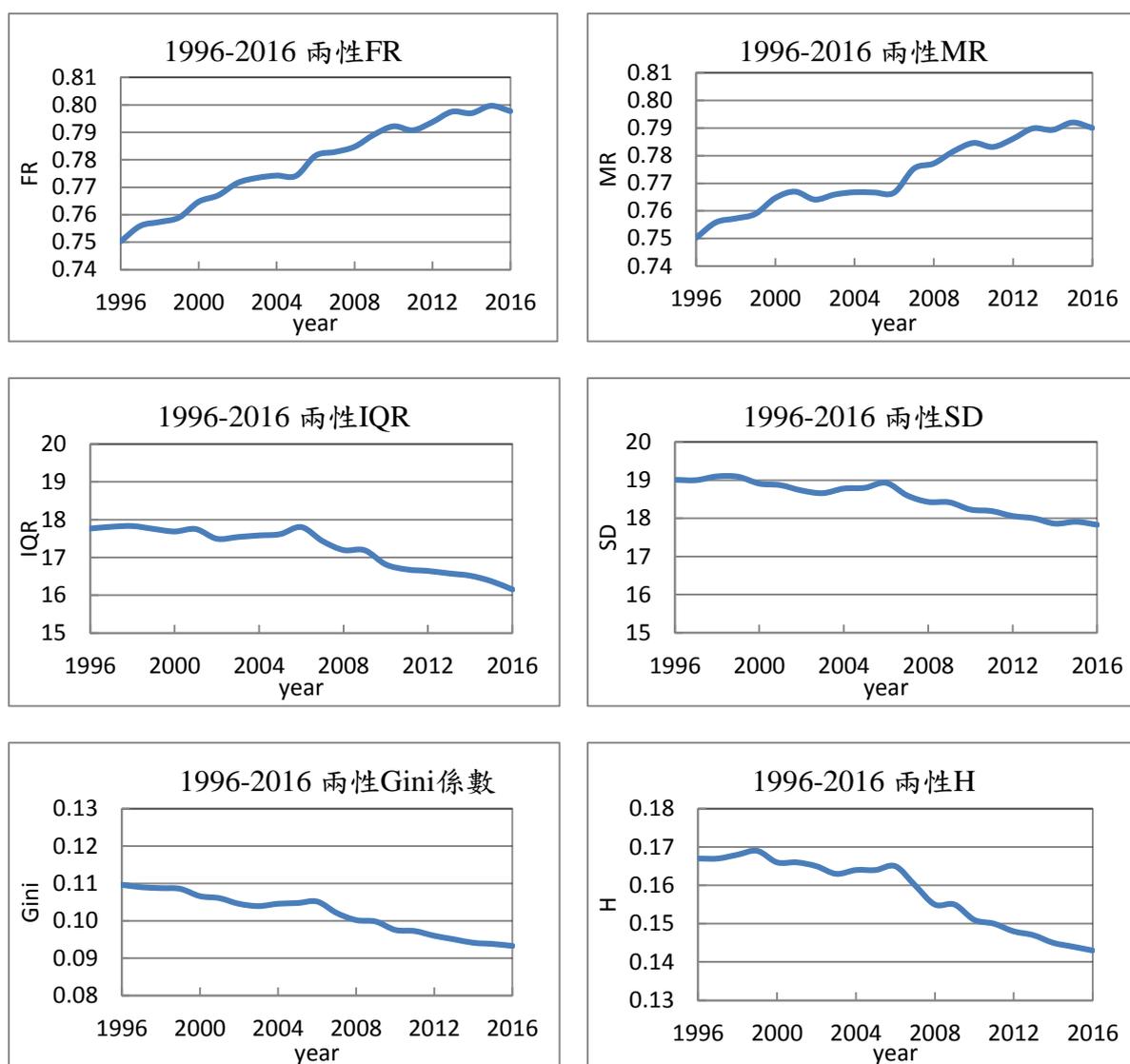


圖 4 1996-2016 年存活死亡年齡變異與存活曲線矩形化趨勢

從 FR 和 MR 可看出，兩者的值皆從 1996 年的 0.75，增加至 2016 年的 0.79，隨著年代的增加，其值大致呈現上升狀態，表示此存活曲線有矩形化的現象。IQR 的值從 18 降至 16，標準差 SD 從 1996 年的 19 緩慢的下降，至 2016 年值為 17.8；Gini 係數從一開始 1996 年的 0.11 稍微減少至 2016 年的 0.09；熵也從原先的 0.167 一路降至 0.143，以上 4 種指標整體呈現下降的趨勢，其意謂死亡年齡的變異變小。

亦可由一簡單的方式看出矩形化的現象(如圖 5)，我們利用 1954-2016 各年的存活曲線來看，由圖 5 可知存活曲線有隨著年代的增加，曲線有逐漸矩形化的現象發生<sup>2</sup>。

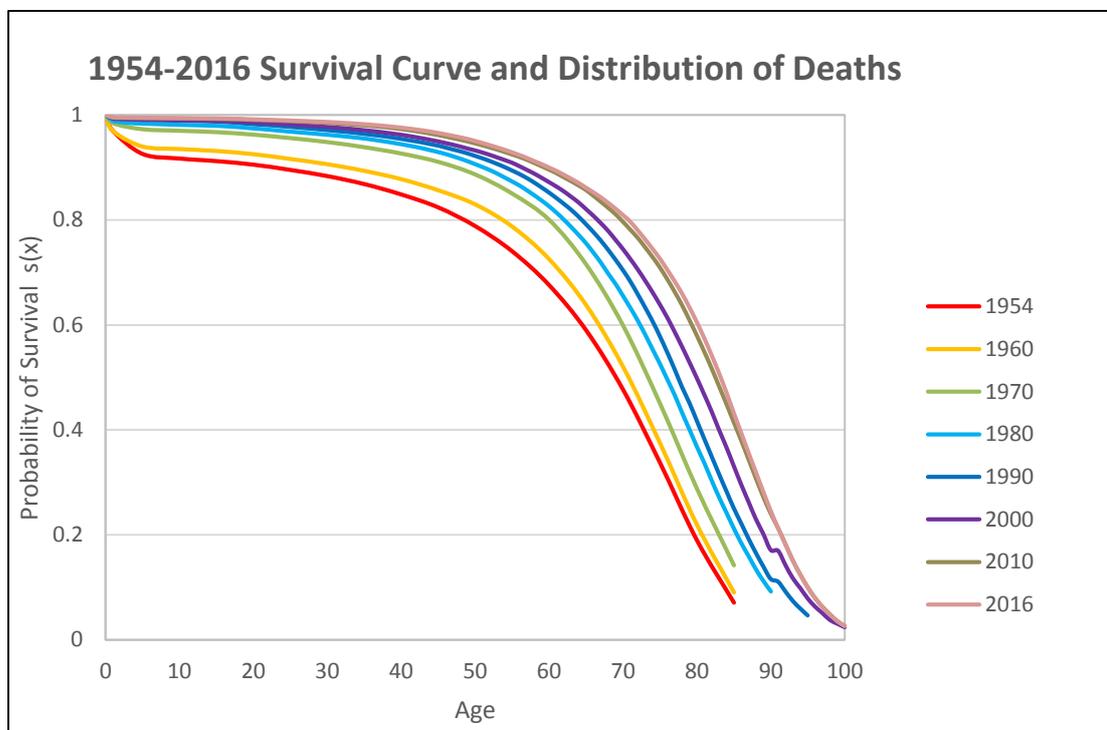


圖 5 1954-2016 年存活曲線與年齡之對應圖

存活曲線矩形化的這種現象與死亡壓縮(Wilmoth and Horiuchi 1999；Cheung et al. 2005)有緊密的關聯；死亡壓縮是指死亡率下降過程中，年輕人口存活率上升，愈來愈多人能夠活到老年，故死亡年齡有趨向高齡集中的現象。在死亡壓縮的過程中，存活曲線會呈現先水平化而後垂直化的矩形化現象，年輕死亡率的下降使存活曲線接近水平，此過程稱為水平化；高齡死亡率下降使高齡的存活曲線從原先平緩的下降，變成較陡峭的下降的過程，則稱之為垂直化，而存活曲線在高齡之垂直化即是矩形化特性；一個簡易測量矩形化的方式為找出存活函數的最大下降斜率，我們試著以矩形化曲線極速下降指標 Fastest Decline(FD)<sup>3</sup> 來說明存活曲線矩形化之情形，FD 為存活曲線斜率之反曲點

<sup>2</sup>圖 5 因資料限制，當中的 1954、1960 及 1970，這三年利用的是內政部統計處提供的五齡組資料，且這三年尚未提供兩性生命表，故是由男、女性的存活機率平均值估算兩性之存活機率，其餘年代則是使用單齡組資料

<sup>3</sup>矩形化曲線極速下降指標 FD： $FD = \max_x \{-s'(x)\} = \max_x \{s(x)\lambda(x)\} = \max_x \{f(x)\}$ ， $x > 15$

所對應之死亡年齡；如圖 6 以 2016 年為例，矩形化斜率在 84 歲(死亡年齡眾數)的下降速率最大，意謂著若存活曲線在較高年齡族有垂直的現象，表示有矩形化的趨勢。

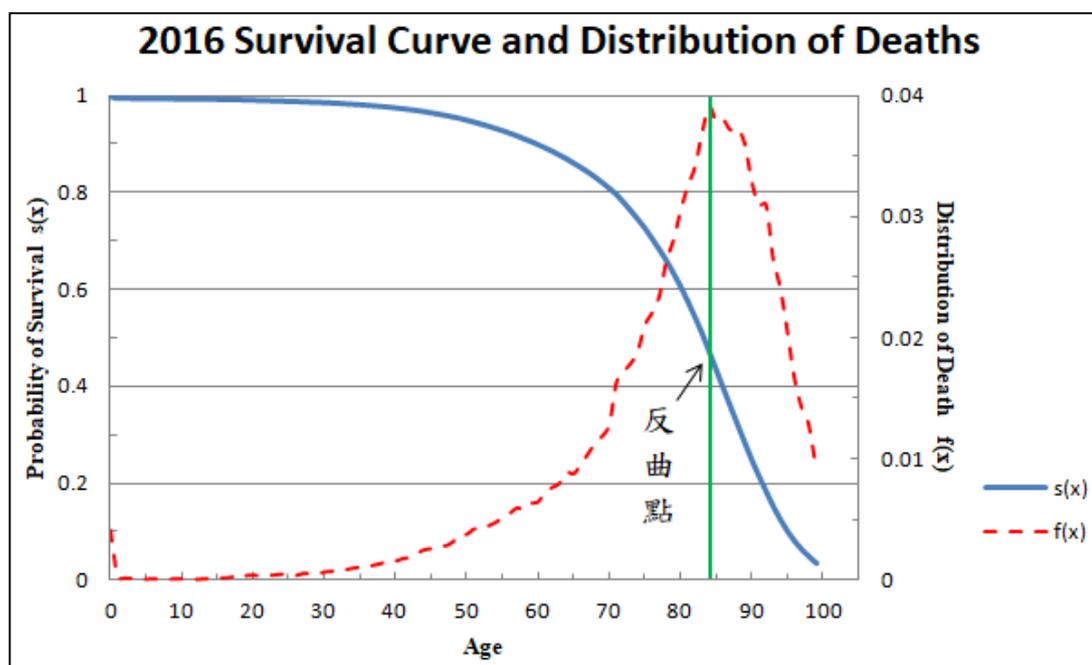


圖 6 2016 年矩形化存活曲線 FD 指標驟降趨勢

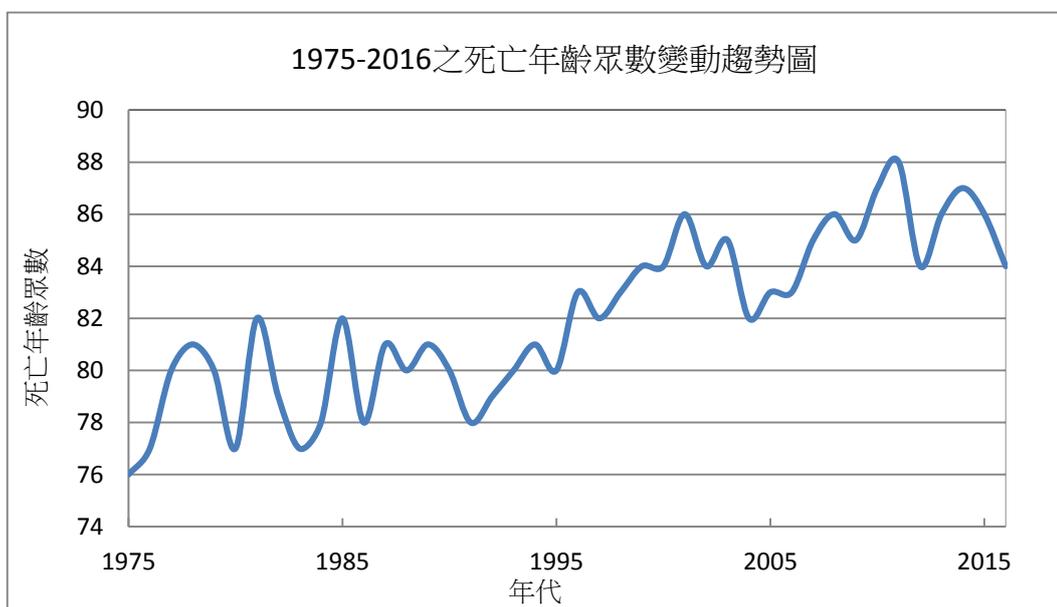
另一方面，我們以 FD 為主，表 5、表 6 及圖 7 為 1975-2016 年的死亡年齡眾數(FD)及 1975-2000 各年至 2016 年之斜率的變動趨勢，從眾數可看出隨著年代的遞增，死亡年齡趨向高齡集中；最大下降速率落在較高年齡族，表示有矩形化的趨勢；而由線性斜率變動趨勢來看，在 1975-2016 年時的斜率為 0.219，到了 1990-2016 年時最高，斜率達 0.27，爾後快速下降，下降至 2000-2016 年的 0.132，而此時的死亡年齡眾數斜率之變動呈水平現象，與 0 無顯著差異，所對應的死亡年齡為 84 歲，似乎到達人們的死亡年齡眾數之極限；惟在 2005-2016 年時為二次曲線，2005-2016 年  $\frac{\partial y}{\partial x} = -0.1837x + 1.37$ ，隨著年代變化，死亡年齡眾數平均每年下降約 0.18 歲。

表 5 1975-2016 年之死亡年齡眾數

年代	死亡年齡眾數(FD)	年代	死亡年齡眾數(FD)
1975	76	1996	83
1976	77	1997	82
1977	80	1998	83
1978	81	1999	84
1979	80	2000	84
1980	77	2001	86
1981	82	2002	84
1982	79	2003	85
1983	77	2004	82
1984	78	2005	83
1985	82	2006	83
1986	78	2007	85
1987	81	2008	86
1988	80	2009	85
1989	81	2010	87
1990	80	2011	88
1991	78	2012	84
1992	79	2013	86
1993	80	2014	87
1994	81	2015	86
1995	80	2016	84

表 6 1975-2000 各年至 2016 年之死亡年齡眾數斜率

年代	線性斜率	年代	線性斜率
1975	0.219	1988	0.258
1976	0.213	1989	0.260
1977	0.210	1990	0.269
1978	0.217	1991	0.269
1979	0.229	1992	0.246
1980	0.238	1993	0.225
1981	0.232	1994	0.208
1982	0.250	1995	0.195
1983	0.253	1996	0.161
1984	0.245	1997	0.161
1985	0.239	1998	0.140
1986	0.256	1999	0.129
1987	0.248	2000	0.132



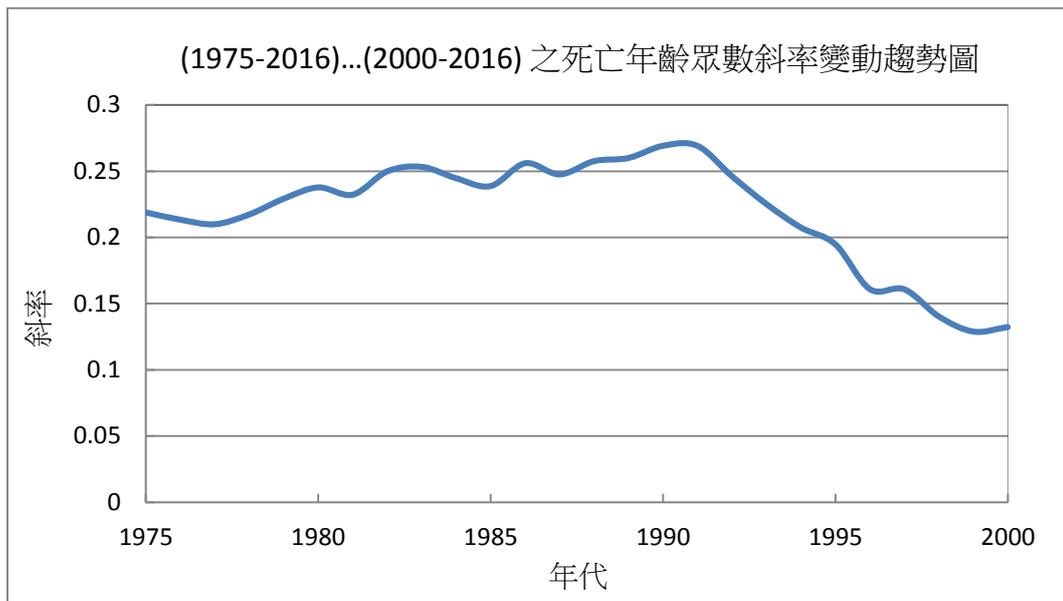


圖 7 1975-2016 年之死亡年齡眾數及 1975-2000 各年至 2016 之死亡年齡眾數斜率

由於上述指標的測量結果彼此存在高相關，Wilmoth and Horiuchi(1999)建議以死亡年齡的四分位差(interquartile range of age at death，以下簡稱 IQR)為代表即可，因為 IQR 避免了年齡截斷的問題，且易於計算及了解。其代表涵蓋 50%生命表死亡人數(d(x))的年齡區間，當死亡年齡分佈變異縮小，IQR 便會減小。另外，還可以從不同時期 IQR 的差異中分解出各年齡組死亡率變化對於死亡壓縮的影響程度。

Kannisto(2000)曾發展出壽命後期死亡年齡眾數(M)及相關的測量，而計算眾數以上的常態分配標準差，Kannisto 稱之為眾數以上的個體壽命標準差 (standard deviation of individual life duration above mode)，以 SD(M+)表示，

$$SD(M+) = \sqrt{\frac{\sum n_i(x_i - M)^2}{n}}$$

其中 n 是生命表中超過 M 的死亡人數，x 為此 n 個人的個別壽命。SD(M+)等於此分配的標準差。

除了以 SD(M+)為測量死亡壓縮的指標外，Kannisto(2000)還提出了與內插法相關的 C 指標來測量死亡壓縮。常見的有 C<sub>10</sub>、C<sub>50</sub>、C<sub>90</sub>；C<sub>50</sub> 係指包含 50%死亡數的最小年齡

區間，其算法是將各年齡層的死亡數( $d(x)$ )由大到小排序後，再依序累加至達到 50% 死亡數(50,000 人)，爾後將此累加死亡數減去 50,000，除以累加後最初達到 50% 死亡數的此年齡層之死亡數，再利用此年齡層的次序減去先前所相除的數即為  $C_{50}$ 。雖然 IQR 以及  $C_{50}$  均衡量 50% 死亡數所分散的年齡區間，但相對於 IQR， $C_{50}$  涵蓋了典型的死亡年齡 ( $M$ )，同時考量了死亡數的集中與分散情形，能更精確掌握壽命後期的變化趨勢。以所有死亡年齡內容為基礎的 IQR 因為會受到嬰幼兒與青壯年死亡數的影響而未能明確反映典型的壽命區間。關於死亡壓縮的兩個指標，IQR 涵蓋了所有年齡的死亡訊息，與  $M$  相關的測量指標  $SD(M+)$  則突顯出壽命後期的死亡壓縮。若將之對應於存活曲線的變化，前者含括了整個存活曲線 (包含水平化與垂直化)，後者則著重於壽命後期階段，也就偏向於存活曲線垂直化的部分。事實上，在死亡率下降的過程中，水平化與垂直化屬於前後兩個不同發展階段。

基於此我們分析了台灣 1998-2016 年  $SD(M+)$  及  $C_{50}$  趨勢如表 7 及圖 8

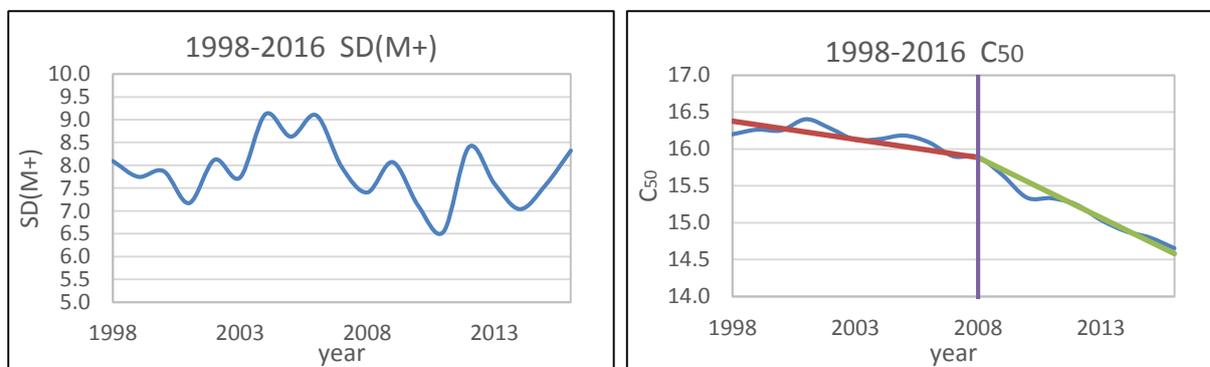


圖 8 1998-2016 年死亡壓縮趨勢指標  $SD(M+)$  和  $C_{50}$

表 7 1998-2016 年之死亡壓縮趨勢指標

年代	SD(M+)	C <sub>50</sub>
1998	8.10	16.20
1999	7.75	16.26
2000	7.87	16.25
2001	7.17	16.40
2002	8.12	16.28
2003	7.73	16.12
2004	9.12	16.13
2005	8.63	16.18
2006	9.10	16.09
2007	7.96	15.90
2008	7.41	15.89
2009	8.07	15.65
2010	7.12	15.34
2011	6.55	15.33
2012	8.40	15.25
2013	7.60	15.04
2014	7.04	14.89
2015	7.56	14.80
2016	8.32	14.65

先粗略的從圖 8 來觀察 SD(M+)，其值在 2004-2006 年達到最高峰約為 9，到了近幾年則是在 8 附近徘徊，我們利用 Run test(Wald and Wolfowitz, 1940)來檢測其隨機性，p 值為 0.627，顯示其隨機性質，加上表 7 及圖 8，整體的值約在 8 上下振盪，我們猜想 SD(M+)或許已達到一種穩定的狀態，這也間接顯示死亡年齡到了某個極限。

我們發現其線性斜率在 1998-2008 年緩降，爾後在 2008 年後下降驟增，利用如下分段迴歸(Piecewise Regression)得到兩段斜率(迴歸係數估計值)分別為  $b_1=-0.04932$  及  $b_2=-0.11341$ ，2008 年後之斜率下降幅度約為之前的 2.3 倍

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 (x_1 - 10)x_2 + \varepsilon$$

$$y = C_{50}, x_1 = \text{year} - 1998, x_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } x_1 > 10 \\ 0 & \text{o/w} \end{cases}$$

有關存活曲線水平化現象，我們則以 1992 與 2016 年的死亡率差異為例，二者死亡率在 60 歲以前差異不大，爾後類似指數成長驟升如圖 9，這意謂 60 歲之前(較年輕者)死亡率下降，使得存活曲線呈水平化的現象，這二年之存活曲線累積各年齡之面積差異(表 8 及圖 10)亦可看出。

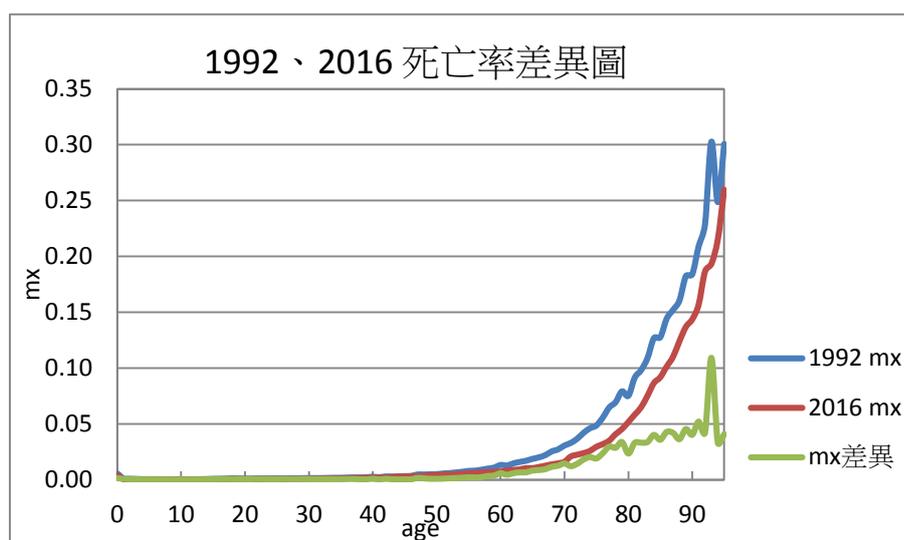


圖 9 1992、2016 年死亡率及差異圖

表 8 1992、2016 年存活曲線矩形化累積至各年齡之面積差異%

age	1992 年存活曲線矩形化 面積差異(%)	2016 年存活曲線矩形化 面積差異(%)	1992 2016 面積差異(%)
10	0.09	0.05	0.04
20	0.22	0.12	0.10
30	0.45	0.23	0.22
40	0.82	0.43	0.40
50	1.44	0.81	0.63
60	2.57	1.59	0.97
70	4.82	3.12	1.70
80	9.34	6.17	3.17
90	17.22	12.36	4.87
95	21.50	15.93	5.57

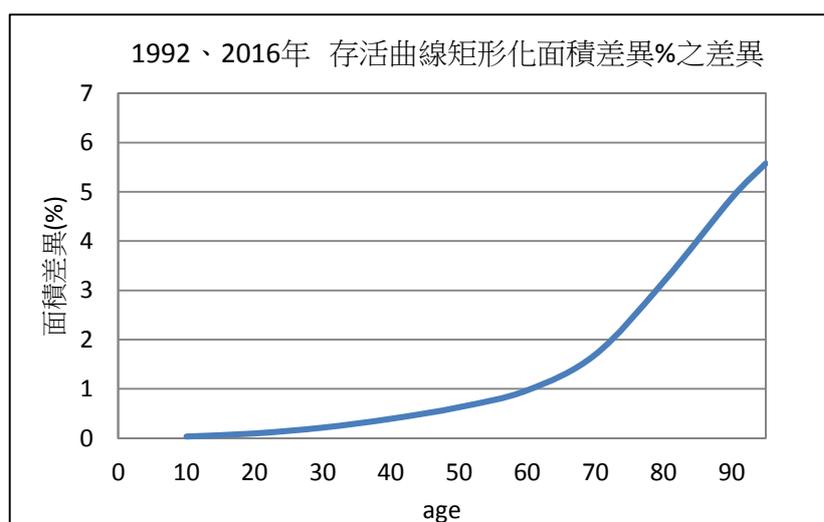


圖 10 1992、2016 年存活曲線矩形化累積至各年齡之面積差異%

事實上，我們亦可經一簡易方式，藉由存活曲線圖來計算曲線與矩形面積差異趨勢，亦得以一窺存活曲線矩形化之端倪，如 1992 及 2016 年(圖 11 之斜線部分)。

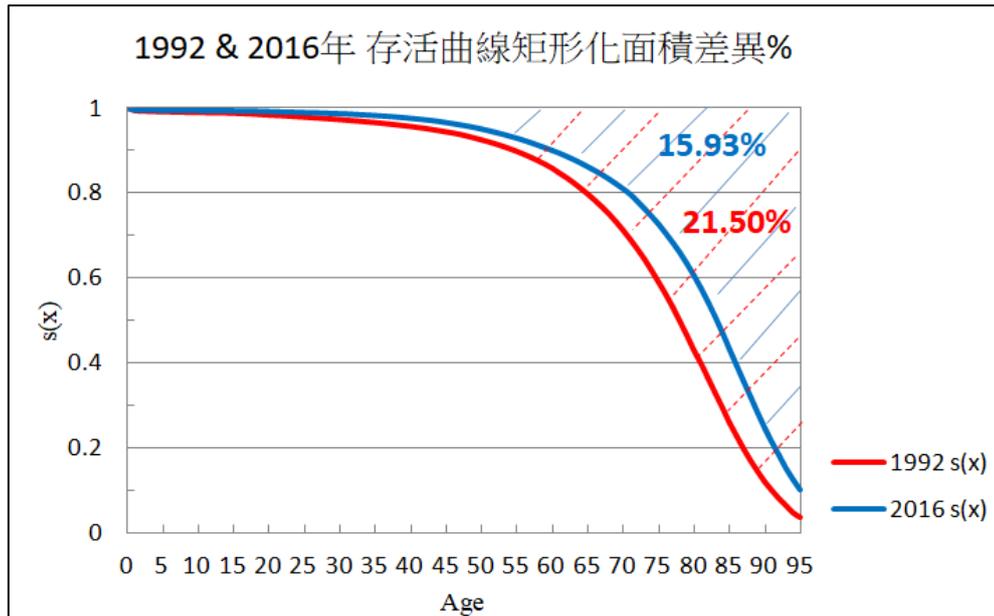


圖 11 1992、2016 年存活曲線矩形化面積差異%

差異面積百分比為： $\frac{\int_0^w (l_0 - l_x) dx}{w} \times 100\% \cong (1 - \frac{e_0}{w}) \times 100\%$ ， $w$  為假設之高齡極限。若  $w$  設定為 100 歲，此與(5.1)FR(固定矩形)之關係式為  $1 - FR$ 。

在此，吾等就有關台灣平均餘命上限研究結果設定  $w$  為 95 歲(劉士嘉與林正祥 2017)，探討 1992-2016 年差異面積趨勢變化。由表 9 可看出存活曲線與矩形面積的差異百分比有逐年下降的趨勢，此數值愈小，表示存活曲線愈呈矩形化的現象，圖 12 線性迴歸趨勢顯示近二十年，二者差異呈下降趨勢，每年平均下降 0.26%，1992 年與 2016 年相較則差了約 5.6%。另從表 9 中顯示，2013 至 2016 年面積差異占比值約在 15.9% 上下振盪，我們推測存活曲線似已趨近矩形化極限的狀態。

表 9 存活曲線與矩形面積差異百分比

年代	差異面積%	年代	差異面積%
1992	21.501	2005	18.375
1993	21.146	2006	17.539
1994	20.946	2007	17.422
1995	21.166	2008	17.268
1996	20.978	2009	16.766
1997	20.348	2010	16.465
1998	20.193	2011	16.642
1999	20.011	2012	16.329
2000	19.397	2013	15.912
2001	19.148	2014	15.995
2002	18.638	2015	15.705
2003	18.448	2016	15.930
2004	18.348		

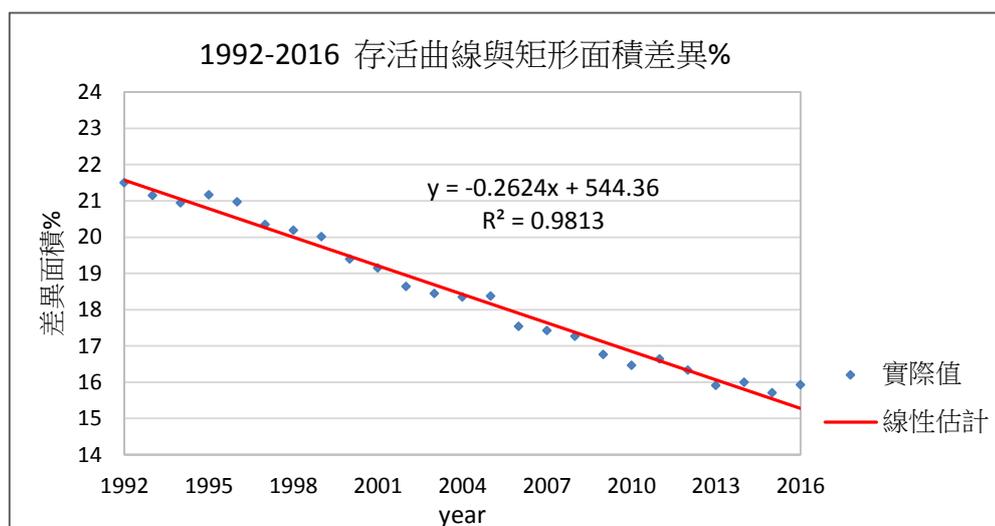


圖 12 1992-2016 年存活曲線與矩形面積差異百分比

由於單年資料訊息可能較為粗略，我們合併三年資料後，發現 1993-2015 年面積差異每年下降約 0.27%(見表 10 及圖 13)，另由 2010-2015 年三年合併資料不難發現，存活曲線與矩形化面積差異正縮減中，並有可能在 15%~16% 振盪，惟需未來新加入資料更進一步探究之，看來趨近矩形化極限(指的是人們實際的存活曲線所能達到的接近完全矩形化的情況，而非理論上的完全矩形化)的步調似是近了。

表 10 存活曲線與矩形面積差異百分比 (三年合併)

年代	差異面積%	年代	差異面積%
1993	21.197	2005	18.087
1994	21.086	2006	17.779
1995	21.03	2007	17.41
1996	20.831	2008	17.152
1997	20.506	2009	16.833
1998	20.184	2010	16.624
1999	19.867	2011	16.479
2000	19.519	2012	16.294
2001	19.061	2013	16.079
2002	18.745	2014	15.871
2003	18.478	2015	15.877
2004	18.39		

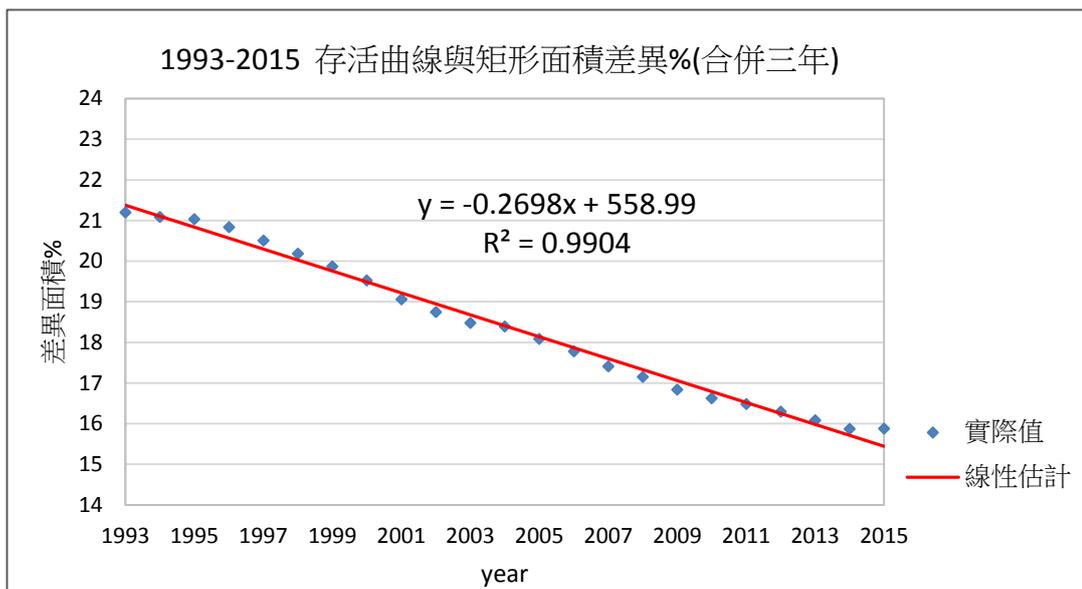


圖 13 1993-2015 年(合併三年)之存活曲線與矩形面積差異百分比

## 伍、延遲老化步調與平均餘命成長相關模式

上一世紀死亡率的下降引起了各年齡死亡率的減少，使得人類壽命不斷的增長，惟許多研究學者認為壽命的增長將會是延遲老化的結果，研究人員已將探討焦點置於減少老化的過程，取代專注於特定疾病的醫學研究，並認為戰勝疾病與失能最有效的方法在於追尋改良影響老化的因子(Butler et al, 2008)。陳寬政(2009)指出台灣死亡率自日治時期以來快速下跌，平均餘命便大幅上升，多年來死亡統計不斷往後延伸，死亡率下降過程中出現年齡分配變動的現象，其下降的動力由早期嬰幼兒人口逐漸移入中高齡人口，直到晚期高齡死亡率的趨平發展，使得平均餘命趨向極值與否成為討論的焦點。台灣未來平均餘命變化一如 1985 年以來所示，餘命主要的增長是來自於六十歲以上的高齡人口，然而在死亡率每年下降 2%的樂觀假設下，百年後兩性平均餘命仍未達百歲，而且男性與女性平均餘命增長的過程中，均顯示死亡率愈趨近於零，變化速度愈緩慢與困難，區間餘命愈趨近於組距，變化愈顯趨緩，兩者相互對應，使得未來平均餘命能夠繼續增長的空間有限，產生趨緩成長之必然現象。另一方面，台灣在 1955 至 2005 年的資料顯示存活曲線水平化的主要來源是早期嬰幼兒與青壯人口死亡率的下跌；1980 年代中期以來，嬰幼兒與青壯齡組的死亡水準已降低到迫近於零，死亡率持續下跌的主要成份移往老年人口，是為平均餘命增長的主軸，死亡率的年齡分配變異數縮小，雖然產生存活曲線矩型化，但仍不足以確定平均餘命是否有其極限(王德睦與李大正, 2009)；陳寬政等(1999)則就台灣與日本資料指出，兩國人口的平均餘命均有向 85 歲上限收斂的趨向。

衰老被定義為是因老化所引起的死亡風險上升，所以延遲衰老乃係減少各年齡之死亡風險。以 Gompertz 模式為例，此一遲緩老化模式之風險函數 $\mu(a) = ae^{\beta a}$ ，延遲衰老意謂 $\beta$ 值的下降。更具體而言，例如在年齡  $a$  的風險為 $\theta a$ 時，若 $\theta = \frac{1}{2}$ ，則表示 60 歲有著 30 歲的風險，不論年齡風險的上升或下降，皆遵循此一基線風險概念，當風險上升， $\theta = \frac{1}{2}$ 即是減少衰老，而當風險下降， $\theta = \frac{1}{2}$ 則是拉長風險下降的時間，所以模式會是延遲成熟或是減緩成長(Baudisch, 2008)。生命的延長來自於所謂的遲緩老化，與其相

對應的則是增強比例風險及死亡時間的加速的下降程度。有別於前節所述矩形化中年輕與中年人口存活率趨於水平，而老年人口存活率趨於垂直化的態勢，本節所探討的是延緩老化對平均餘命的影響，釐清各類死亡率模式改變情形，探討為何改變存活機率斜率(老化步調)甚於水平(死亡率)的影響。

加速風險模式有別於風險比例模式(Cox, 1972)及加速失效時間模式(Kalbfleisch and Prentice, 2002)，係由 Chen and Wang(2000)所提出；而加速失效時間模式是由風險比例與加速風險結合而成，之後由 Goldstein and Cassidy(2012)提出較加速失效時間模式更為廣義模式－混合模式，其變化主要來自於死亡率水平下降參數 $\theta_1$ 與遲緩衰老步調參數 $\theta_2$ 消長情形，藉由此模式的兩參數 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ，得以認知未來平均餘命成長的變化趨勢。

另外，有學者稱加速風險為「遲緩衰老」，加速失效時間為「死亡延遲」；故將前述風險比例 (proportional-hazards)，遲緩衰老 (Senescence-slowness)，死亡延遲 (Death-delaying)及混合模式(Hybrid model)統整如表 11，此表為各類死亡率變動模式。而為何減少衰老步調 1%較減少 1%死亡率對平均餘命有更大的影響？此與生命表熵 (Keyfitz, 1977; Mitra, 1978; Goldman & Lord, 1986; Vaupel, 1986)有密切的關聯。

表 11 死亡率變動模式

模型	風險	機率密度	平均餘命	平均餘命變動速率( $\frac{\Delta e}{e(0)}$ )
基線	$\mu(a)$	$\mu(a)l(a)$	$\int l(a)da$	0
風險比例 (Cox, 1972)	$\theta\mu(a)$	$\theta\mu(a)l(a)^\theta$	$\int l(a)^\theta da$	$-H\delta$
遲緩衰老 (加速風險) (Chen and Wang, 2000)	$\mu(\theta a)$	$\mu(\theta a)l(\theta a)^{\frac{1}{\theta}}$	$\frac{1}{\theta} \int l(\theta a)^{\frac{1}{\theta}} da$	$-(1-H)\delta$
死亡延遲 (加速失效時間) (Kalbfleisch and Pretince, 2002)	$\theta\mu(\theta a)$	$\theta\mu(\theta a)l(\theta a)$	$\frac{1}{\theta} \int l(a)da$	$-\delta$
混合模式 (Goldstein and Cassidy, 2012)	$\theta_1\mu(\theta_2 a)$	$\theta_1\mu(\theta_2 a)l(\theta_2 a)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}$	$\frac{1}{\theta_2} \int l(a)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} da$	$-H\delta_1 - (1-H)\delta_2$

註： $\delta = \theta - 1$ ，而在混合模式中 $\delta_1 = \theta_1 - 1$ 和 $\delta_2 = \theta_2 - 1$ 。

Goldstein and Cassidy (2012)曾以日本 1990 年至 2005 年資料，利用混合模式分析男性死亡率改善情況，其平均餘命之增長 1/3 受到死亡率水平下降改變之影響，而遲緩衰老的斜率改變則佔了 2/3。

我們利用台灣 1998 年到 2008 年間的兩性資料來驗證，30 歲平均餘命由 1998 年 47.46 歲增至 2008 年的 49.69 歲，而透過混合模式，可看出 2008 年的真實值與 2008 年利用混合模式所配適的值相去不遠(如圖 14)，除了 90 歲後的配適較不佳(因台灣人口資料在末歲區間並不穩定)，其餘年齡層的配適效果良好，故我們可利用混合模式來估算未來平

均餘命的增長是受到了遲緩老化的影響居多，抑或是死亡率下降的效果。

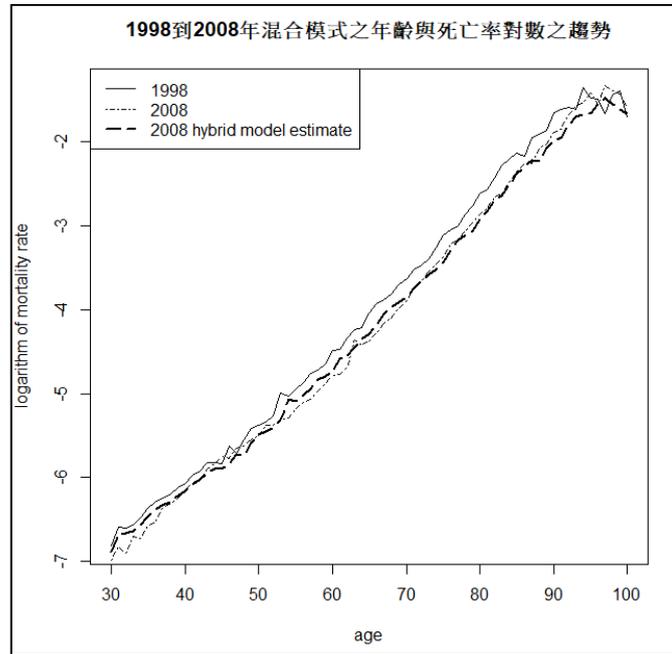


圖 14 1998 到 2008 年混合模式之年齡與死亡率對數趨勢圖

利用 1998 及 2008 年的風險函數，得知參數 $\theta_1$ 為 0.931， $\theta_2$ 為 0.962，顯示出死亡率  
的下降百分比 $\delta_1$ 為 7% ( $\delta_1 = \theta_1 - 1 = -0.07$ )，而老化步調的下降百分比 $\delta_2$ 則是  
3.8% ( $\delta_2 = \theta_2 - 1 = -0.038$ )，再以一階泰勒展開式估計平均餘命的改變：

$$\begin{aligned} \frac{\Delta e(30)}{e(30)_{1998}} &= -H\delta_1 - (1 - H)\delta_2 \\ &= -0.168 * (-0.07) - (0.832) * (-0.038) \\ &\approx 0.0116 + 0.0316 \\ &= 0.0432 \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\Delta e(30) = e(30)_{2008} - e(30)_{1998}$ 。

$$\begin{aligned} \Delta e(30) &= e(30)_{1998} * 0.043208 \\ &= 47.46 * 0.043208 \\ &= 2.05 \end{aligned} \tag{5.2}$$

平均餘命變動速率為 0.0432，透過與 1998 年的平均餘命 47.46 歲相乘，可估算出在混合模式下 2008 年的平均餘命和實際 1998 年平均餘命的差為 2.05(如(5.2)式)。而 1998 到 2008 年的資料顯示出平均餘命增長的趨勢中，平均餘命的增長受到死亡率下降的影響為 0.55 (即  $47.46 * 0.116$ )，佔整體平均餘命增長的 27%，而遲緩老化造成斜率改變的值為 1.50 (即  $47.46 * 0.0316$ )，則是佔整體的 73%，由此可知，對於平均餘命的增長而言，受到遲緩老化的影響遠較死亡率下降來的大，故找出並改良影響老化的因子以延遲老化是我們未來要朝向的目標。

## 陸、結語

本研究旨在探討生命表函數衍生性公式之理論及應用，藉由生命表函數推導出其相關數學公式詮釋生命表之某些特性，係屬形式人口學之範疇，鑑於一些文獻之方法及公式多專注於理論及概念推導說明，並未就其長期變動趨勢進行進一步分析，吾等乃運用台灣生命表資料援引數則衍生性公式進行探討。

根據分析結果，所得結論如下：

1. 本文闡明生命表結構特性，利用台灣生命表藉由其衍生性公式進行分析探討生命表函數中風險函數、存活機率及平均餘命間之關係。以 2016 年為例，在 40 歲之前的存活機率幾乎為 1，70 歲後的存活機率近乎呈直線下降；而就死亡力而言，在 50 歲前的死亡力極小近乎於 0，爾後至 80 歲呈指數成長，存活機率與死亡力呈反向關係，存活機率高，死亡力就小；平均餘命則是隨著年齡的增長而日漸下降，而存活機率則與平均餘命呈正向關係，存活機率愈高，平均餘命就愈大。就平均餘命變方及存活機率變方而言，存活機率變方在高齡前的變異不大，到了 80 歲開始變異遽增，而平均餘命的變方則是隨年齡的增加逐漸下降，愈到高齡變異愈小，表示高齡組內的餘命較為接近，顯示出眾人的死亡年齡趨近一致，此現象與存活曲線矩形化有所關聯。另透過靜止人口平均存活年齡等同於平均餘命的平均特性，得知台灣的人口族群仍在成長中，只是成長的效果日漸減小，相對老化指標顯示出我們的人口似趨近靜止人口，甚有可能走向老化。

2. 1955 至 2016 年台灣生命表資料存活曲線圖顯示存活曲線矩形化的情況，藉由各種指標(FR、MR、IQR、SD)來驗證此一現象。由於存活曲線矩形化與死亡年齡變異呈反向關係，曲線愈矩形化表示人口整體的死亡年齡愈接近，故死亡年齡的變異愈小，利用 Gini 係數及熵得知死亡年齡的變異正逐年減小，另，其他指標(FD、SD(M+)、C<sub>50</sub>)可作為輔助說明，均顯示出存活曲線有趨向矩形化，且死亡變異也在縮減中，整體而言，我們的死亡年齡似乎向某種極限收斂。

3. 有關遲緩老化與平均餘命成長方面之探討，高齡平均餘命成長，顯然受到死亡率下降與遲緩老化間消長之影響，在諸多模式中，我們採用混合模式利用台灣 1998 及 2008 年的資料探討平均餘命的增長趨勢，受到死亡率下降的影響佔整體平均餘命增長的 27%，而遲緩老化造成的影響則佔了 73%，遲緩老化對平均餘命增長的影響遠較死亡率下降來的大。如果延長高齡平均餘命對人類而言是件有意義的事，找出並改良影響老化的因子以延遲老化應是人們追尋的目標。

就宏觀的生命表歷史遠景而言，存活曲線矩形化可能不是神話。不論如何，近幾十年來，死亡年齡的變異性似是趨近於穩定，目前死亡率的下降意謂著近年來變異程度多數集中在一狹窄的年齡範圍中，可能會繼續維持下去，不論平均餘命的增加與否。另一方面，就延長高齡平均餘命而言，遲緩老化扮演了一個相當重要的角色。

## 參考文獻

- 王德睦、李大正 (2009) 台灣的存活曲線矩形化與壽命延長。人口學刊，38:1-31。
- 周江雄等 (2001) 生命表的構造理論。南開大學出版社，天津。
- 陳寬政(2009) 人口老化的原因與結果。編入羅紀瓊主編之《台灣人口老化問題》，P.7-30。  
台北：中央研究院經濟研究所。
- 劉士嘉、林正祥(2017) 人類壽命上限值探討—以臺灣為例。人口學刊，55:133-163。
- Baudisch, A. 2008. *Inevitable Aging?: Contributions to Evolutionary-Demographic Theory*. Berlin: Springer.
- Butler, R. et al. 2008. “New model of health promotion and disease prevention for the 21th century” *British Medical journal* 377: a399. doi: 10.1136/bmj.a399.
- Chen, Y. Q. and M. C. Wang. 2000. “Analysis of accelerated hazards models.” *Journal of the American Statistical Association*, 95(450): 608-618.
- Cheung, Karen S-L., J. Robine, J-C Tu, and G. Caselli. 2005. “Three Di-mensions of the Survival Curve: Horizontalization, Verticalization, and Longevity Extension.” *Demography* 42(2): 243-258.
- Chiang, C.L. 1984. “The Life Table and Its Applications.” Malabar, FL: Robert E. Krieger.
- Cohen J.E. 2010. “Life expectancy is the death-weighted average of the reciprocal of the survival-specific force of mortality”, *Demographic Research*, 22(5): 115-128.
- Cox, D. R. 1972. “Regression models and life tables.” *Journal of the Royal Statistical Society Series B* 34(2): 187-220.
- Demetrius L. 1974. “Demographic parameters and natural selection.” *Proc Natl Acad Sci U.S.A* 71:4645-647.
- Demetrius L. 1979, “Relations between demographic parameters.” *Demography* 16:329-38.
- Finkelstein, M. and Vaupel, J.W. 2009. “Survival as a function of life expectancy.” *Demographic Research (Formal Relationships 6)* 21: 879-884.
- Fries, J. 1980. “Aging, Nature Death, and the Compression of Morbidity.” *The New England Journal of Medicine* 303(3): 130-135.
- Goldman, N. and Lord G. 1986. “A new look at entropy and life table.” *Demography* 23: 275-282.
- Goldstein, J.R. 2009. “Life lived equals life left in stationary populations.” *Demographic Research* 20(2): 3-6.
- Goldstein, J.R., and Cassidy, T. 2012. “How slowing senescence translates into longer life

- expectancy.” *Population studies*, 66(1) : 29-37.
- Kalbfleisch, J. D. and R. L. Prentice. 2002. “The statistical analysis of failure time data, 2nd edn.” New York: John Wiley.
- Kannisto, V. 2000. “Measuring the Compression of Mortality.” *Demographic Research* 3 (Article 6).
- Keyfitz, N. 1968. *Introduction to the Mathematics of Population*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Keyfitz, N. 1977. *Applied Mathematical Demography*. New York: John Wiley and Sons.
- Kim, Y. J. and Aron, J. L. 1989. “On the equality of average age and average expectation of remaining life in a stationary population.” *SIAM Review* 31(1): 110–113.
- Kleinbaum DG. 1996. *Survival Analysis*. New York: Springer-Verlag 83-253.
- Le CT. 1997. *Applied Survival Analysis*. New York: John Wiley & Sons, inc. 179-214.
- Lotka, A.J. 1998. *Analytical theory of biological populations*. London: Plenum Press, New York.
- Mitra, S. 1978. “A short note on the taeuber paradox.” *Demography* 15(4):621-623.
- Myers, G.C. and K.G. Manton. 1984a. “Compression of Mortality: Myth or Reality?” *The Gerontologist* 24:346-353.
- Myers, G.C. and K.G. Manton. 1984b. “Recent Changes in the U.S. Age at Death Distribution: Further Observations.” *The Gerontologist* 24:572-575.
- Namboodiri, N.K., and Suchindran, C.M. 1987. “Life Table Techniques and Their Applications.” Academic press, Florida.
- Sanderson, W. and S. Scherbov. 2005. “Average remaining lifetimes can increase as human populations age”, *Nature* 435(7043): 811-813.
- Shkolnikov V and Andreev E. 2010. “Spreadsheet for calculation of life-table dispersion measures.”
- Spurgeon, E. F. 1929. *Life Contingencies*. Cambridge University Press, second edition.
- Vaupel, J.W. 1986. “How change in age-specific mortality affects life expectancy.” *Population Studies* 40:147-157.
- Wald A. and Wolfowitz J. 1940. “On a test whether two samples are from the same population.” *The Annals of Mathematical Statistics* 11, 147-162.
- Wilmoth, J. R. and S. Horiuchi. 1999. “Rectangularization revisited: Variability of age at death within human populations.” *Demography* 36:475-495.